ТОЧКА ЗРЕНИЯ

УДК 37+510

А. В. Ястребов

«ПРИОРИТЕТНЫЙ СПОР» МЕЖДУ КОШИ И МАКЛОРЕНОМ, ИЛИ ИСТОРИЯ ОДНОЙ ОШИБКИ

Аннотация. Обычному человеку – школьнику, студенту, специалисту – приходится осваивать большой объем математической информации, преимущественно по книгам. При этом речь идет об общепринятых определениях и доказанных теоремах, т. е. о продукте работы математиков. В то же время в повседневной жизни достаточно сложно найти тексты, выявляющие генезис того или иного конкретного математического утверждения, или тексты, посвященные деятельности математика. Настоящая статья вносит определенную лепту в установление баланса, поскольку описывает процесс изобретения автором одной математической теоремы. Рефлексия по поводу проделанной работы позволяет проиллюстрировать некоторые дуалистические свойства математики. Помимо деятельностно-продуктивного дуализма в статье иллюстрируется то обстоятельство, что математическое утверждение возникает сложным, подчас противоречивым, внелогическим путем, и лишь впоследствии получает обоснование – строгое дедуктивное доказательство (индуктивно-дедуктивный дуализм). Кроме того, в статье выявляется взаимосвязь между индивидом и социумом, взаимное влияние друг на друга автора и его коллег, как близких, так и отдаленных в пространстве и времени (личностно-социальный дуализм). Таким образом, анализ процесса изобретения конкретной математической теоремы позволяет выявить фундаментальные дуалистические свойства, присущие не только математике, но и другим научным дисциплинам.

Статья адресована, прежде всего, преподавателям, аспирантам и студентам – всем представителям естественнонаучных и технических специальностей, которые интересуются математикой.

Ключевые слова: математика, история математики, теорема, изобретение теоремы.

Abstract. Both students and specialists have to master a large volume of mathematical information mainly through books and manuals, which generally concerns the accepted definitions and proved theorems. However, it is rather difficult to find out texts tracing the genesis of a definite mathematical statement or the life of a certain mathematician. The paper attempts to achieve the balance by describing the invention process of a mathematical theorem. Apart from the activity-production dualism, the paper illustrates the fact that any mathematical statement development demands quite complicated and even contradictive illogical approaches, and only thereafter it gets a rigorous didactic proof (inductive-deductive dualism). The author also elicits the interrelation between an individual and society, the mutual influence of a mathematician and his colleagues - both the close and remote ones in distance and time. Therefore, the analysis of such process as a theorem invention can reveal the fundamental didactic characteristics inherent to mathematics, as well as any other scientific discipline.

The paper is addressed to teachers, postgraduates and students specializing in natural sciences and technical disciplines related to mathematics.

Keywords: mathematics, history of mathematics, theorem, theorem invention.

1. Введение

В педагогической среде мало обсуждается то обстоятельство, что практически все население страны приобщено к математике. Действительно, школьники изучают большое количество теорем. Благодаря этому они приобретают первоначальный опыт доказательных рассуждений и полноценной аргументации, которые так нужны в сложной социальной среде любому человеку независимо от его профессии. Студенты математических, естественнонаучных, технических, экономических специальностей продолжают интенсивное изучение теорем, поскольку математика составляет неотъемлемую часть приобретаемой ими профессии. Будущих учителей математики специально обучают методике изучения теорем, т. е. методам мотивации школьников к освоению теоремы, методам первоначального ознакомления с изучаемым фактом и т. д. Во всех этих случаях речь идет именно об *изучении* известных науке теорем и остается в стороне другой, быть может, более важный процесс – *процесс изобретения* теоремы. Именно ему посвящена настоящая статья.

За основу берется математическая работа [9] и подробно описывается весь ход ее появления на свет: возникновение «из ниоткуда» первоначальной идеи, формулировка гипотезы, трудоемкое доказательство, выявление взаимосвязей с работами классиков и т. д. Кратко говоря, в статье описан генезис конкретного математического результата со всеми его сложностями и противоречиями. В силу этого статья адресована, прежде всего, преподавателям математики, аспирантам и студентам. Кроме того, она будет интересна представителям естественнонаучных и технических специальностей, которые интересуются математикой. Наконец, она может быть полезна тем читателям, которые не чуждаются математики и умеют читать не только между строк, но и «между формул», пропуская формулы как «черный ящик» и выявляя суть утверждений из гуманитарных связок между ними.

Переходя на язык образов, можно сказать, что в статье пойдет речь о «приключениях» рядового математика, о процессе размышлений, о результатах, ошибках и проч. Автор попытается смешать стили и сочинить текст, который соединяет в себе черты научной статьи и детективного рассказа, в котором присутствуют классики и современники, открытия и забвение, надежды и разочарования... Именно поэтому в следующем разделе повествование будет идти от первого лица.

2. Изобретение теоремы

Эрудированный человек мгновенно поймет, что никакого реального приоритетного спора между Коши (1789–1857) и Маклореном (1698–1746) не могло возникнуть по той простой причине, что первый из них родился через 43 года после смерти второго. Тем не менее, такой «спор» возникнет как историко-логическая коллизия, но об этом чуть ниже.

Сначала сформулирую то, что знают все математики. Пусть даны n положительных чисел $x_1, \ldots x_n$. Хорошо известно, что их среднее арифметическое A и среднее геометрическое G связаны неравенством Коши:

$$A \geqslant G. \qquad (1)$$

Оно подробно изучалось разными авторами, о чем можно прочесть, например, в знаменитой монографии Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Полиа [6] или более новой книге С. И. Калинина [3]. Одним из направлений такого изучения является поиск уточнений неравенства Коши. При этом под аддитивным уточнением неравенства Коши понимается возможность обоснования неравенств типа $A_n \geqslant G_n + r$, где $r > 0$, а под мультипликативным уточнением – возможность обоснования неравенств типа $A_n \geqslant G_n s$, где $s > 0$ [3, с. 204]. Очевидно, что в обоих случаях речь идет о поиске величины α_n, удовлетворяющей неравенству $A_n \geqslant \alpha_n \geqslant G_n$.

Зная то, что знают все, я занимался изучением взаимосвязей неравенства Ки Фана с гомотетиями вещественной прямой. Задача состояла в следующем. Если H_λ^p – гомотетия вещественной прямой с центром λ и коэффициентом *p*, то из исходной конфигурации $U = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точек вещественной прямой можно получить новую конфигурацию $U' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, где $x_i' = H_\lambda^p(x_i)$, а затем для каждой из конфигураций вычислить их средние арифметические $A(U)$ и $A(U')$, соответственно и их средние геометрические $G(U)$ и $G(U')$. Как это принято в теории неравенств Ки Фана, можно сравнить величины $\frac{G(U)}{G(U')}$ и $\frac{A(U)}{A(U')}$. Оказывается, что если исходная конфигурация нетривиальна, то для одних точек вида (λ, *p*) на координатной плоскости λ*Op* выполняется неравенство Ки Фана $\frac{G(U)}{G(U')} < \frac{A(U)}{A(U')}$, для других – парадоксальное неравенство Ки Фана $\frac{G(U)}{G(U')} > \frac{A(U)}{A(U')}$, а для третьих, и это самое интересное, – *равенство* $\frac{G(U)}{G(U')} = \frac{A(U)}{A(U')}$ [7, 8]. Множество таких точек назовем кривой Ки Фана. В одной из предыдущих статьей [8] мы показали, что та часть кривой Ки Фана, которая лежит в третьем квадранте координатной плоскости λ*Op*, задается равенством $\lambda = \frac{\theta p}{1-p}$, где θ – это корень уравнения $\sum_{k=0}^{n-1} (A^n \sigma_{nk} - C_n^k A^k G^n) \mu^{n-k-1} = 0$, а σ_{nk} – это элементарная симметрическая функция степени *k* от *n* переменных $x_1, \ldots, x_n$. (Напомним, что она задается равенством

$$\sigma_{nk} := \sigma_{nk}(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \; n = 2, 3, \ldots, \; k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Здесь и далее символ := означает «равно по определению», причем двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.)

В этом месте рассуждений я был удивлен видом коэффициентов многочлена: $A^n \sigma_{nk} - C_n^k A^k G^n$. Дело в том, что в структуру коэффициентов *на равных основаниях* входят среднее арифметическое, среднее геометрическое, элементарные симметрические функции и числа сочетаний. Все выглядит так, как если бы коэффициенты многочлена состояли из фрагментов некоей формулы, которая никому неизвестна и которую, естественно, следует придумать.

В попытках придумать формулу я рассуждал примерно так. Очевидно, что $A = \frac{1}{n}\sigma_{n1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $G = \sqrt[n]{\sigma_{nn}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$. Для того чтобы сделать эти формулы похожими, их можно переписать в виде $A = \sqrt[1]{\sigma_{n1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)/C_n^1}$ и $G = \sqrt[n]{\sigma_{nn}(x_1, x_2, \ldots, x_n)/C_n^n}$ соответственно. Теперь показатель корня, второй индекс у элементарной симметрической функции и верхний индекс у числа сочетаний равны друг другу и принимают значение 1 или n. Если же эти величины принимают значение k, то надо просто ввести «похожие» функции:

$$\rho_{nk} := \rho_{nk}(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[k]{\sigma_{nk}(x_1, \ldots, x_n)/C_n^k}\ ,\ k = \overline{1, n}\,. \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что при переходе от σ_{nk} к ρ_{nk} мы сначала «нормируем» величину σ_{nk}, поделив ее на количество слагаемых в правой части равенства (2), а затем извлекаем корень соответствующей степени. Благодаря этому выполняются равенства $\rho_{n1} = A$ и $\rho_{nn} = G$, а все функции ρ_{nk} становятся однородными функциями степени 1.

Однородные функции можно попытаться сравнить по величине, причем мы знаем, что неравенство (1) можно переписать в виде $\rho_{n1} \geqslant \rho_{nn}$. Естественно предположить, что остальные ρ_{nk} при $k = \overline{2, n-1}$ лежат между крайними значениями ρ_{n1} и ρ_{nn}. Так появилась следующая гипотеза.

Гипотеза. Величины ρ_{nk} удовлетворяют нестрогим неравенствам

$$A = \rho_{n1} \geqslant \rho_{n2} \geqslant \cdots \geqslant \rho_{nn} = G\,. \tag{4}$$

При этом равенство достигается либо везде, либо нигде, причем тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Процесс формулировки гипотезы был для меня достаточно поучительным. С одной стороны, неравенства (4) красивы и даже эффектны. С другой стороны, приведшие к ним соображения, высказанные ниже формулы (2), слабы, нелогичны, основаны на чисто эстетических, т. е. недоказательных, рассуждениях. *Однако никаких других, более глубоких соображений у меня не было.* Быть может, опыт такого рода может служить иллюстрацией мысли, высказанной фон Нейманом по поводу мотивов математической деятельности: «Думаю, что вряд ли ошибусь, если скажу, что критерии отбора <задач>, которыми руководствуется математик, как и его критерии успеха, носят в основном эстетический характер» [4].

В тот момент, когда гипотеза уже была сформулирована, а ее истинность еще не установлена, я совершил профессиональную ошибку: не обращаясь к первоисточникам, я начал доказывать формулу (4), и в конце концов доказал, потратив на это несколько более полугода. Полгода (!) эта формула была доминантой всей моей жизни, подобно тому как три карты доминировали в сознании пушкинского Германа, но результат был сладок! Все это время меня вдохновляло то, что в учебной литературе я *нигде* не встречал ни одного намека на формулу (4), хотя, повторюсь, она очень красива. Все это время я боялся того, что формула уже известна, так как с трудом можно вообразить «недосмотр» классиков. Так и случилось. В уже упомянутой книге Харди, Литтльвуд и Полиа я обнаружил теорему Маклорена [6, с. 69, теор. 52]:

$$\rho_{n1} \geqslant \rho_{n2} \geqslant \cdots \geqslant \rho_{nn}\,. \tag{5}$$

Вот это был удар! Нокдаун. Так и вспомнишь В. С. Высоцкого: «Вот апперкот, я на полу и мне нехорошо». Однако, «падая», я успел заметить небольшую разницу между формулами (4) и (5).

...Возврат к работе начался с анализа сделанного наблюдения. Если ограничиться уже приведенными ссылками, то получается, что в 1729 г. Маклорен обнаружил интересное соотношение (5) между элементарными симметрическими функциями, но ничего не сказал ни о среднем арифметическом, ни о среднем геометрическом, как если бы он не знал о них (что сложно себе представить). Спустя почти сто лет, в 1821 г., Коши доказал неравенство (1) о взаимосвязи среднего арифметического и среднего геометрического [6, с. 29–30], «не заметив» при этом, что оно является мгновенным следствием теоремы Маклорена (в это тоже как-то не верится). Вот и историческая загадка, и «приоритетный спор»[1]. Современные источники не проясняют ситуацию. Так, С. И. Калинин по поводу неравенства (1) пишет следующее: «Приводим доказательство неравенства, *приписываемое* Коши» (Курсив мой. –

[1] Отсылаем читателя к нелицеприятному мнению Абеля о Коши, изложенному в книге В. И. Арнольда «Что такое математика?» [1, с. 26].

А. Я.) [3, с. 154]. А кто же на самом деле придумал приводимое доказательство? Поневоле вспомнишь шутку Арнольда: «Если какой-нибудь предмет имеет персональное наименование, то это никогда не бывает имя первооткрывателя» [2, с. 9].

Полученный результат оказался известен, значит, необходимо было оценить достоинства *метода* доказательства. И тут мне «повезло». Дело в том, что оба доказательства теоремы Маклорена, изложенные Харди и товарищами, носили алгебраический характер [6, с. 69–71], а мое доказательство было чисто аналитическим. Полностью оно опубликовано в «Ярославском педагогическом вестнике» [9]. Его идея состоит в том, чтобы использовать понятие условного экстремума функции нескольких переменных. Приведем его краткое изложение.

Возьмем поверхность *S*, задаваемую неявным уравнением $\sigma_{nk}(x_1,\dots,x_n) - C_n^k = 0,\ k \geqslant 2$. На этой поверхности рассмотрим числовую функцию $\sigma_{n,k-1}: S \to R$ и найдем ее условный экстремум.

1. Методом Лагранжа покажем, что точка $\tilde{x} = (1,\ 1,\ \dots\ ,\ 1)$ является единственной критической точкой изучаемой функции на поверхности *S*.

2. Докажем, что $\tilde{x}$ – это точка локального минимума.

3. Докажем, что $\tilde{x}$ – это точка глобального минимума, который равен C_n^{k-1}.

4. Для произвольных положительных чисел x_1, ..., x_n точка $z = \left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\alpha}, \cdots \frac{x_n}{\alpha}\right)$, где $\alpha := \rho_{nk}(x_1,\dots,x_n)$, лежит на поверхности *S*.

5. В силу глобальности минимума имеем

$$\sigma_{n,k-1}\left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\alpha}, \cdots, \frac{x_n}{\alpha}\right) \geqslant \sigma_{n,k-1}(\tilde{x}) = C_n^{k-1}.$$

Отсюда легко выводится неравенство

$$\rho_{n,k-1}(x_1,\dots,x_n) \geqslant \rho_{nk}(x_1,\dots,x_n).$$

Читатель, находящийся «в теме», легко увидит суть приведенных рассуждений: берется схема одного из доказательств неравенства Коши [3, с. 196–198] и реализуется применительно к функциям σ_{nk} и $\sigma_{n,k-1}$. Одна беда – реализовать ее отнюдь не легко, потому что приходится прибегать к дополнительным ухищрениям. Да и в самой схеме не обоснованы утверждения (справедливые!) пунктов 2 и 3

[3, с. 196–198]. Обоснования в полном объеме есть в другом источнике – у Г. М. Фихтенгольца [5, п. 214, с. 473–474], однако там обсуждается неравенство Коши только для четырех чисел.

Итак, я «уговорил» себя (и убежден, что правильно) опубликовать результат ради популяризации красивой теоремы и расширения границ применимости полезного метода доказательства. При попытке отразить суть статьи в заголовке возникла коллизия. С логической точки зрения теорема Маклорена является уточнением неравенства Коши, однако с хронологической точки зрения невозможно уточнить неравенство, еще не вошедшее в научный обиход. В результате было выбрано эпатирующее историков название «Аналитическое доказательство теоремы Маклорена об уточнениях неравенства Коши» [9].

В заключение скажу о поразившей меня книге С. И. Калинина «Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана» [3]. В ней собрано тридцать одно доказательство неравенства Коши. Помимо доказательств самого Коши в ней изложено тринадцать различных индуктивных доказательств, четыре – с использованием вспомогательных неравенств, два – на основе метода Штурма. Неравенство Коши выводится из неравенства Иенсена, из неравенства Бернулли, из некоего более общего неравенства. Помимо алгебры для доказательства используются три различных аналитических подхода. Словом, у меня было, чем пользоваться.

Очевидно, что я больше не повторю допущенную мной ошибку, однако об уже сделанной оплошности ничуть не жалею. Полгода я жил как первопроходец. А что может быть лучше?!

Большинство важных событий в жизни человека происходит в окружении друзей, и моя история не стала исключением. С. И. Калинин (Вятский государственный гуманитарный университет) привлек мое внимание к тематике неравенств, особенно неравенств Ки Фана. Когда формула (4) была уже давно придумана, а доказательство ее никак не получалось, П. А. Корнилов (Ярославский государственный педагогический университет) организовал компьютерный эксперимент, убедивший меня в целесообразности дальнейших усилий. О. А. Иванов (Санкт-Петербургский университет) показал мне теорему Маклорена в книге [6]. Всем им я глубоко признателен.

Что же дальше? В туристической среде живет популярный тост: «За новые маршруты со старыми друзьями!». Так вот, я надеюсь найти уточнения неравенств Ки Фана, но это будет уже совсем другая история.

Литература

1. Арнольд В. И. Что такое математика? М.: МЦНМО, 2008.

2. Арнольд В. И. Нужна ли в школе математика? М.: МЦНМО, 2004.

3. Калинин С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана. Киров: ВГГУ, 2002.

4. Нейман Дж. Фон. Математик // Природа. 1983. № 2. С. 88–95.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: Наука, 1966.

6. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1948.

7. Ястребов А. В. Мультипликативные неравенства Ки Фана и гомотетии вещественной прямой // Математ. вестн. пед. и ун-тов Волго-Вятского региона. Вып. 14: Период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Киров: ВятГГУ, 2012. С. 203–221.

8. Ястребов А. В. Явное выражение кривой Ки Фана // Математика и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания: материалы Междунар. конф. «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. Ярославль: ЯГПУ, 2012.

9. Ястребов А. В. Аналитическое доказательство теоремы Маклорена об уточнениях неравенства Коши // Ярославский педагогический вестник. 2012. № 4. Серия «Естественные науки».