УДК 378.14:517 DOI: 10.17853/1994-5639-2020-1-113-145

ВАРИАТИВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ВУЗОВСКОГО КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА: ОПЫТ ВНЕДРЕНИЯ В ПРАКТИКУ ОБУЧЕНИЯ

С. И. Калинин[1], Л. В. Панкратова[2]

Вятский государственный университет, Киров, Россия.
E-mail: [1]kalinin_gu@mail.ru, [2]pankratovalarisa19@rambler.ru

Аннотация. *Введение.* Смена общей парадигмы образования, переход его к компетентностной модели и сопровождающая их перманентная смена федеральных государственных стандартов высшего образования породили проблему отбора содержания программ курсов, изучаемых студентами вузов. В области математических знаний она стоит особенно остро в связи с декларируемой задачей усиления математической подготовки будущих специалистов, в которой центральное место занимает математический анализ. Одним из возможных путей решения обозначенной проблемы является выделение в университетских дисциплинах инвариантной и вариативной составляющих.

Цель публикации заключается в описании разработанных авторами для преподаваемого в вузе курса математического анализа вариативных компонент содержания и представлении результатов их внедрения в практику обучения.

Методология и методы. Проведенное исследование базировалось на принципах непрерывности и системности современного образования, его актуальных концепциях (фундаментализации, гуманизации, гуманитаризации, индивидуализации и дифференциации) и положениях компетентностного, деятельностного, личностно ориентированного и междисциплинарного подходов к обучению. В качестве основных методов были задействованы теоретический анализ и эксперимент, итоги которого оценивались посредством эмпирических и праксиметрических методов.

Результаты и научная новизна. Работа, осуществлявшаяся в течение многих лет в Вятском государственном университете, показала, что системообразующим фактором вариативного образования, определяющим средства и формы его реализации, служит именно вариативное содержание обучения. Оно позволяет органично дополнять сведения о ключевых понятиях, теоремах и методах математического анализа с учетом специфики специальности студентов, что способствует их успешной профессионализации; систематически переосмыслять и оперативно корректировать учебный материал, принимая во внимание новые научные факты и открытия; развивать уже на младших курсах познавательную самостоятельность обучающихся, приобщая их к регулярной и неформальной исследовательской деятельности. Охват экспериментом студентов нескольких математических направлений подготовки, их обязательное вовлечение в самостоятельные исследования, применение и поддержка механизмов междисциплинарности и транспрофессионализма обеспечили научную новизну предпринятого исследования. Полученные в ходе педагогических измерений (анкетирования, опросов студентов, наблюдения за их учебными и научно-исследовательскими достижениями) результаты формирования профессиональных компетенций будущих выпускников подтвердили эффективность использования в процессе обучения сконструированных вариативных компонент содержания дисциплины «Математический анализ».

Практическая значимость. Изложенный в статье материал и выводы авторов могут быть полезны методистам высшей школы и преподавателям математики, заинтересованным в повышении качества математической подготовки в вузах.

Ключевые слова: высшее образование, математический анализ, вариативное содержание обучения, вариативная компонента.

Для цитирования: Калинин С. И., Панкратова Л. В. Вариативные компоненты вузовского курса математического анализа: опыт внедрения в практику обучения // Образование и наука. 2020. Т. 22, № 1. С. 113–145. DOI: 10.17853/1994–5639–2020–1-113–145

VARIATIVE COMPONENTS OF THE UNIVERSITY COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS: THE EXPERIENCE OF INTRODUCTION INTO THE PRACTICE OF TEACHING

S. I. Kalinin[1], L. V. Pankratova [2]

Vyatka State University, Kirov, Russia.
E-mail: [1]kalinin_gu@mail.ru, [2]pankratovalarisa19@rambler.ru

Abstract. *Introduction.* The change in general paradigm of education, its transition to a competent model and the permanent change in federal state standards of higher education have created the problem associated with selecting the content of course programmes studied by university students. In the field of mathematical knowledge, the problem of strengthening students' mathematical training is particularly acute in connection with the declared task, in which mathematical analysis is central. One of the ways to solve this problem is to distinguish the invariant and variable components in the content of the university course.

The *aim* of the present research is to describe the content of variable components developed by the authors for the university course of mathematical analysis and to present the results of their introduction into the practice of teaching.

Methodology and research methods. The conducted research is based on the principles of continuity and systemacity of modern education, its current concepts (fundamentalisation, humanisation, humanitarisation, individualisation and differentiation) and the provisions of competency-based, activity-based, personality-oriented and interdisciplinary approaches to teaching. The theoretical analysis and experiment were used as the main methods, the results of which were evaluated through empirical and praximetric methods.

Results and scientific novelty. The present study, carried out for many years at Vyatka State University, has shown that the system-forming factor of variable education, determining the means and forms of its implementation, is the variable content of education. Firstly, this particular content provides additional information on key concepts, theories and mathematical analysis, taking into account the specifics of students' specialties, which facilitated their successful professionalism. Secondly, the variable content of education offers the possibility to systematically rethink and rapidly revise educational material, taking into account new scientific facts and discoveries. Finally, it can develop cognitive autonomy of junior students, encouraging them to carry out regular and informal research activities. The coverage of students of several mathematical directions of education, their obligatory involvement in independent research activities and support for mechanisms of interdisciplinarity and transprofessionalism ensured the scientific novelty of the research undertaken. The results of the formation of professional competencies of future graduates obtained during pedagogical measurements (questionnaires, surveys of students, observation of their educational and research achievements) confirmed the effectiveness of using the designed variable components of the discipline "Mathematical Analysis" in the learning process.

Practical significance. The research material and the authors' conclusions described in the present article can be useful for methodologists of higher school and teachers of mathematics interested in improving the quality of mathematical training in universities.

Keywords: higher education, mathematical analysis, variable content of education, variable component.

***For citation**:* Kalinin S. I., Pankratova L. V. Variative components of the university course of mathematical analysis: The experience of introduction into the practice of teaching. *The Education and Science Journal.* 2020; 1 (22): 113–145. DOI: 10.17853/1994–5639–2020–1-113–145

Введение

Трансформации, происходящие в российской высшей школе, являются следствием смены общей парадигмы образования. Переход к его компетентностной модели отразился прежде всего в реформировании федеральных государственных стандартов. В последние годы наблюдается их стремительная эволюция: ФГОС ВПО, ФГОС ВО, ФГОС ВО 3+, ФГОС ВО 3++, появление профессиональных стандартов … При этом одним из принципиальных отличий новых ФГОС стало изменение описания требований к проектированию содержания образовательного процесса. В частности, структура стандартов высшего образования сегодня уже не предполагает его детализации, что нельзя воспринимать однозначно. Согласно результатам исследования Е. Н. Ивахненко и Л. И. Аттаевой, «представители ведущих вузов считают, что в федеральных государственных образовательных стандартах третьего поколения … неоправданно исключены все требования, касающиеся содержания образования» [1, с. 29]. По мнению авторов цитируемой статьи, невыполнение жестких требований к содержательному аспекту разрушает отечественную систему подготовки кадров, в особенности для наукоемких и высокотехнологичных отраслей экономики.

Сейчас вузы обладают исключительными академическими правами в области проектирования и разработки содержания учебных дисциплин. Однако отсутствие в ФГОС примерного перечня вопросов, на которые следует ориентироваться преподавателям, и нередко размытые формулировки критериев качества подготовки обучающихся порождают проблему оптимального отбора учебного материала, который, с одной стороны, обеспечит формирование заложенных ФГОС компетенций выпускника, а с другой – не будет перенасыщен фактической информацией и позволит обучающимся проявлять самостоятельную познавательную активность.

На обозначенную проблему в отношении высшего математического образования указывают многие отечественные специалисты. В. И. Токтарова, С. Н. Федорова отмечают «универсальный характер и расплывчатость определения компетенций, связанных с математической подготовкой», сформулированных в ФГОС ВО, что влечет соответствующие организационно-методические проблемы [2, с. 84]. Е. А. Перминов констатирует: «В качестве “новых” рабочих программ математических дисциплин нередко предлагаются их прежние варианты, но в сжатом виде, причем полученные путем простого “механического” сокращения их содержания, из которого не всегда возможно понять, каким именно специальностям оно адресовано» [3, с. 37–38]. И. А. Елецких, Т. М. Сафронова, Н. В. Черноусова усматривают возможность выполнения требований ФГОС только в целенаправленном, осознанном проектировании образовательного процесса в вузе по каждому направлению обучения в целом и по каждому конкретному предмету в частности [4].

Многочисленные исследователи описывают различные пути решения указанной проблемы. Н. П. Пучков предлагает идею разделения курса математики на две части: «инвариантную для всех реализуемых в вузе направлений подготовки и вариативную, профессионально направленную» [5, с. 72], что в содержательном плане подразумевает выделение инвариантной энциклопедической части (основных понятий, методов, идей, принципов математики) и вариативной составляющей (тем, наиболее востребованных в процессе преподавания специальных дисциплин). Мы склонны согласиться с выдвинутыми тезисами, однако отметим, что автор данной работы ограничивается лишь общими замечаниями относительно проектирования содержания обучения математике в вузе.

В. М. Кутузов и Н. В. Лысенко отводят вариативной составляющей современного образовательного процесса не просто важную, а ключевую роль. Они подчеркивают: «Вариативная компонента образования развивается не только для повышения статуса выпускника-специалиста, но и для обогащения и пополнения фундаментальной составляющей содержания образования» [6, с. 4]. Следовательно, эта компонента отличается динамичностью и со временем может стать частью энциклопедических, фундаментальных знаний, т. е. уже инвариантом. Это определенным образом отражает диалектику содержания образования. Указанные авторы, впрочем, тоже не конкретизируют содержательную часть рассматриваемой компоненты образования.

О важности различных видов и методов вариативной подготовки студентов, в особенности о разработке и реализации индивидуальных образовательных траекторий, говорится и в упоминавшейся публикации Е. А. Перминова [3, с. 46]. Но речь в ней идет лишь о реализации принципа непрерывности математического образования в профессионально-педагогических вузах, т. е. о подготовке педагогов профессионального обучения.

Вариативность содержания профессионального образования, определяющая индивидуальные образовательные траектории, выделена ведущими представителями отечественной методологии транспрофессионализма Э. Ф. Зеером и Э. Э. Сыманюк в качестве одного из принципов развития транспрофессионализма и технологий его реализации [7, с. 15]. В последнее десятилетие данная теория выходит на новые горизонты в связи с изменением образовательной парадигмы и поиском общих закономерностей прогресса научного знания, а ее положения признаются основой модернизации системы подготовки профессиональных кадров.

Таким образом, поиск элементов, которые могут составить содержание вариативной части математического образования в вузе, представляет собой актуальную научно-методическую проблему.

Цель статьи заключается в изложении результатов внедрения вариативных компонент в содержание вузовского обучения математическому анализу. Новизна исследования обусловлена обязательным вовлечением студентов ряда математических направлений подготовки в реальную самостоятельную научно-исследовательскую деятельность. Сконструированные вариативные компоненты являются оригинальными и отражают взгляд авторов на обучение указанной дисциплине будущих бакалавров и магистров.

Обзор литературы

Принятый в 1992 г. закон РФ «Об образовании» провозгласил ориентированность образовательной системы на свободу и плюрализм, ее адаптивность к уровням и особенностям развития и подготовки обучающихся, автономность образовательных учреждений. Эти новые (в сравнении с действовавшими в СССР) принципы государственной политики явились отражением смены общественной идеологии и послужили правовой основой вариативного образования. Таким образом, в категориальной структуре дидактики это относительно новый объект, в связи с чем многими учеными активно разрабатываются его различные теоретические и методологические аспекты.

Е. И. Саниной, А. М. Маскаевой выделены предпосылки развития вариативного образования в России, проведен обзор нетрадиционных образовательных систем и авторских школ, стоявших у его истоков, перечислены правительственные реформы, осуществленные в данном направлении [8]. Авторы этой работы, опираясь на труды А. Г. Асмолова, Б. С. Гершунского, Ю. В. Громыко, исследовали психологическую сторону вариативности. Сравнивая различные подходы к трактовке вариативного образования, они предлагают понимать его как «возможность выбора индивидуальной образовательной траектории учащимся в зависимости от социально-экономических и индивидуально-личностных факторов» [8, с. 9]. По их мнению, однако, существующие определения данного понятия должны систематически дорабатываться с учетом динамики требований и запросов со стороны общества к образованию в целом.

Результаты глубокого анализа аспектов вариативности образования получены Т. В. Живокоренцевой [9]. Выделяя ключевые позиции: множественность, уникальность, динамичность – в трактовке обсуждаемого феномена, автор осмысляет его сущность с точки зрения различных методологических концепций и научных подходов. Перечисленные характеристики позволяют рассматривать его в качестве объекта диатропики (методологии разнообразия), отправляют к проблемам познания в естественнонаучном и гуманитарном дискурсах, делают значимыми в исследовании вариативности «такие синергетические контексты, как диалогичность, становление, свободу» [9, с. 205].

К показателям вариативности Т. В. Живокоренцева относит тип образовательного учреждения, его образовательную среду, многообразие реализуемых дидактических подходов, индивидуальные качества обучаемого, уникальность педагогического взаимодействия и др. Первоосновой этих показателей является вариативность *содержания*, поскольку именно она «позволяет учитывать социальные и личностные потребности субъектов образования, обеспечивает специфику образовательной среды учебных заведений, в том числе и целостную реализацию образовательных подходов» [9, с. 207]. Таким образом, вариативное содержание предполагает выбор моделей обучения, педагогических технологий, а также методов, средств и форм учебной работы.

Основываясь на том, что каждая система имеет как устойчивые, составляющие ее «ядро» элементы, так и элементы вариативные, пополняющие его новым опытом, содержание современного высшего образования должно отвечать, с одной стороны, принципу фундаментальности и гибкости, с другой – вариативности. Такая позиция обусловливает необходимость перехода к универсальному образованию, поскольку «современный человек… как личность должен уметь понимать и преобразовывать разные социальные отношения, а как профессионал – уметь воздействовать на них» [10, с. 34]. Подчеркивая, что «универсальное образование всегда диалогично и поликультурно, личностно и вариативно» [10, с. 36], М. Левит утверждает: «Основой содержания универсального образования компетентной личности … оказываются, почти как в старой классической гимназии, языки … и математика как важнейшая из формальных универсальных знаковых систем» [10, с. 41]. Таким образом, математическая подготовка была и остается краеугольным камнем полноценного образования на любой его ступени, а определение вариативного содержания математических дисциплин в общеобразовательной школе и вузе становится все более актуальным.

Курс математического анализа – одна из традиционных составляющих математического образования в вузе. Его изучение является условием формирования фундаментальных знаний будущего выпускника. Аппарат этой дисциплины составляет научную основу различных специальных предметов, используется для решения теоретических задач и проведения прикладных исследований. На языке математического анализа производится, например, описание множества динамических процессов (причем не только в естествознании и микро- или макроэкономике, но и в лингвистике, сфере инвестиций и IT-технологий, в частности при создании информационных поисковых систем). Этот факт особенно значим для мотивирования студентов при освоении ими методов обсуждаемой научной области как сущности современного математического моделирования. Данное обстоятельство нацеливает на поиск путей повышения эффективности изучения математического анализа в вузе, прежде всего на осмысление принципов отбора его содержания для различных направлений подготовки.

Проблемам преподавания этой дисциплины посвящено большое количество публикаций. Их авторы чаще всего исследуют возможности продуктивного использования различных технологий обучения: дистанционных, информационных, интегрированных, сетевых, электронных и др. (см., например, [11, 12]). Другое направление научного поиска – особенности изучения математического анализа студентами отдельных направлений подготовки: педагогических, инженерно-технических, экономических, юридических и пр. (см., например, [4, 13, 14]). Заметим, что выделенные векторы исследований зачастую нельзя четко дифференцировать, поскольку их авторы обосновывают варианты применения определенного подхода при обучении студентов различных специализаций.

Особое место среди имеющихся источников занимают публикации, отражающие вопросы методологии высшего математического образования [3, 15, 16] и аспекты государственных образовательных реформ, непосредственно влияющих на обучение математике в вузе [2, 5]. Работы иностранных авторов, раскрывающие методики преподавания математических дисциплин, зачастую являются узкоспециализированными.

Различным вопросам вариативного обучения студентов и школьников посвящены исследования Е. В. Клейменовой[1], С. М. Крачковского[2],

[1] Клейменова Е. В. Педагогические условия реализации вариативного обучения студентов высшего учебного заведения: дис. ... канд. пед. наук. Липецк, 2009. 196 с.

[2] Крачковский С. М. Дивергентные задачи по математике как средство развития вариативного мышления старшеклассников: дис. ... канд. пед. наук. Москва, 2016. 208 с.

А. М. Маскаевой[1], И. П. Попович[2] и др. На уровне докторских диссертаций соответствующая тематика разрабатывалась Е. И. Дезой[3], В. Н. Ковальчук[4], А. Б. Ольневой[5], А. А. Прокофьевым[6], В. А. Сидоренковым[7] и др. Однако упоминаемые труды в основном либо относятся к иным предметно-методическим областям, либо адресованы другой образовательной ступени (начальной или средней школы). В работах, касающихся непосредственно вариативного математического образования в вузе, изучаются по большей части теоретические аспекты проблемы или конструируются методические системы обучения лишь для конкретного направления подготовки студентов.

Поскольку комплексных исследований, направленных на поиск вариативных составляющих обучения математическому анализу в вузе, обнаружить не удалось, мы предприняли попытку систематизации собственного опыта обращения к вариативным компонентам в преподавании рассматриваемой дисциплины, а также разбор предпосылок их внедрения в вузовскую практику. Одна из задач статьи – осмысление результатов педагогического взаимодействия преподавателей со студентами на основе каждой осваиваемой вариативной компоненты.

Материалы и методы

Концепция проведенной нами работы основывалась на принципах непрерывности и системности современного образования, а его теоретико-методологическую базу составили тенденция фундаментализации ма-

---

[1] Маскаева А. М. Проектирование индивидуальных образовательных траекторий учащихся старших классов в условиях вариативного обучения математике: дис. … канд. пед. наук. Москва, 2011. 220 с.

[2] Попович И. П. Вариативность в обучении физике как дидактическое условие повышения качества знаний учащихся в средней школе: дис. … канд. пед. наук. Челябинск, 2007. 229 с.

[3] Деза Е. И. Индивидуальные траектории фундаментальной подготовки учителя математики в условиях вариативного образования: дис. … д-ра пед. наук. Москва, 2012. 367 с.

[4] Коновальчук В. Н. Вариативное развивающее начальное образование: дис. … д-ра пед. наук. Ростов-на-Дону, 2005. 419 с.

[5] Ольнева А. Б. Вариативный подход к математическому образованию в техническом вузе: дис. … д-ра пед. наук. Астрахань, 2007. 362 с.

[6] Прокофьев А. А. Вариативные модели математического образования учащихся классов и школ технического профиля: дис. … д-ра пед. наук. Москва, 2005. 375 с.

[7] Сидоренков В. А. Вариативное обучение русскому (родному) языку в антропоцентрическом аспекте: дис. … д-ра пед. наук.в форме науч. докл. Санкт-Петербург, 2000. 75 с.

тематического образования [15], концепции гуманизации и гуманитаризации образования[1], теории вариативного образования[2], индивидуализации и дифференциации обучения[3]. Выработка эффективной стратегии исследования осуществлялась с учетом основных положений компетентностного, деятельностного, личностно-ориентированного и междисциплинарного подходов в обучении[4]. Механизмы взаимодействия данных подходов позволили проектировать вариативное обучение студентов математическому анализу с применением индикаторов транспрофессионализма и трансфессионализма.

Составной частью исследования было изучение классических трудов по математическому анализу и осмысление многочисленных современных публикаций в данной научной области (см., например, работы зарубежных авторов, тематика которых во многом пересекается с нашими научными интересами [17–23] и способствует наполнению содержания вариативных компонент дисциплины, представленных ниже).

Кроме того, осуществлялась проработка нормативной документации (ФГОС ВО, Концепции развития математического образования, профессиональных стандартов и др.), а также доступных методических ресурсов и программного сопровождения участвующих в эксперименте студентов различных направлений подготовки. Было выявлено, что авторы учебников и учебных пособий по математическому анализу чаще всего целиком сосредоточены на традиционном изложении данной дисциплины и не ставят задачу знакомства читателей с направлениями современных исследований по математическому анализу, не предпринимают должных попыток включения в содержание обучения оригинальных теоретических вопросов и задач. Это обстоятельство во многом объясняется тем, что ма-

[1] См., напр., Иванова Т. А. Гуманитаризация общего математического образования: Монография. Н. Новгород: Изд-во НГПУ, 1998. 206 с., Саранцев Г. И. Гуманитаризация математического образования и его состояние сегодня // Математика в школе. 2006. № 4. С. 57–62.

[2] См., например: Асмолов А. Г. Стратегия и методология социокультурной модернизации образования. Москва, 2011. 74 с., Пикан В. В. Технология вариативного обучения. Москва, 2007. 165 с.

[3] Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. Москва: Педагогика, 1990. 192 с.

[4] См., например: Епишева О. Б. Деятельностный подход как теоретическая основа проектирования методической системы обучения математике: дис. … д-ра пед. наук. Москва, 1999. 460 с., Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование. 2003. № 2. С. 58–64, Якиманская И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе. Москва: Сентябрь, 2002. 96 с.

тематический анализ – классический раздел математики, его подлинно фундаментальная составляющая. Не следует, однако, воспринимать его как свод застывших артефактов, свидетельствующих о величии науки прошлых столетий. Дисциплина продолжает активно развиваться и на сегодняшний день есть немало результатов, достойных перехода «с переднего края науки» в область ее энциклопедической составляющей.

Действительно, если прежде математический анализ понимали только как курс дифференциального и интегрального исчислений, то сегодня невозможно представить его без таких разделов, как теория функций действительного и комплексного переменного, вариационное исчисление, гармонический и функциональный анализ, теория дифференциальных и интегральных уравнений, производящие функции и преобразование Фурье. Возможно, достижения современных областей математического анализа (эргодической теории и теории динамических систем, анализа на многообразиях, нестандартного анализа и др.) тоже когда-либо будут включены в программу вузовского содержания обучения предмету, но пока они представляют вопросы передовой математической науки, результаты которой недоступны для понимания широкой аудитории, однако высоко оцениваются научным сообществом. Например, в 2010 г. за работы по эргодической теории медалью Филдса награжден израильский математик Э. Линденштраусс, а в 2018 г. этой награды удостоен итальянский и швейцарский математик А. Фигалли, специалист по вариационному исчислению и дифференциальным уравнениям в частных производных.

Можно назвать множество других ученых, внесших значительный вклад в развитие математического анализа и особенно его приложений. Все названные выше современные области анализа имеют междисциплинарный характер и тесно связаны с абстрактной алгеброй, формальной логикой, топологией, статистической физикой. Уместно вспомнить слова В. И. Арнольда о том, что ни для преподавания, ни для применения в каких-либо других науках отрезанная от физики математика не приспособлена[1]. Данная точка зрения сегодня, в так называемую цифровую эпоху, «усилена» И. В. Аржанцевым, деканом факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ: «Математике нужны приложения. Они не только гарантируют ей право на существование, но и являются средой, которая генерирует новые сугубо математические задачи … Технологические прорывы часто основаны на принципиально новых алгоритмах и теоремах, подчас из весьма абстрактных областей математики» [24].

[1] Арнольд В. И. О преподавании математики // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. Вып. 1 (319) [Электрон. ресурс]. Режим доступа: www.ega-math.narod.ru/Arnold2.htm (дата обращения: 10.06.2019).

Таким образом, перспективные достижения математического анализа составляют научную основу производственных инноваций. Внедрение последних в массовое использование есть обязательное условие их изучения широким кругом специалистов, т. е. является задачей образования.

Помимо осмысления содержания вузовских учебников и учебных пособий по математическому анализу исследование включало в себя следующие этапы:

1) теоретический анализ способов фиксации вариативного содержания в контексте различных подходов к обучению студентов и определение на его основе эффективных форм педагогического взаимодействия участников образовательного процесса;

2) определение вариативного содержания курса математического анализа для следующих направлений подготовки: педагогическое образование (подготовка будущих учителей математики и информатики), прикладная математика и информатика, математика и компьютерные науки, а также обоснование его места в составе дисциплины;

3) проведение эксперимента по внедрению вариативных компонент в изучение математического анализа студентами названных направлений подготовки. Соответствующая системная работа в течение продолжительного времени (более двадцати лет) проводилась на базе Вятского государственного университета – ВятГУ (до 2016 г. – Вятского государственного гуманитарного университета, до 2002 г. – Вятского государственного педагогического университета);

4) оценка итогов эксперимента путем педагогических измерений (анкетирования, опроса студентов, анализа результатов их учебной и научно-исследовательской деятельности).

Результаты наших исследований по рассматриваемой теме регулярно обсуждались на научно-методических семинарах и научно-практических конференциях различного уровня, в том числе международного.

Результаты исследования

Изложение материалов данного раздела соотносится с последовательностью обозначенных выше этапов проведенного нами исследования. Это позволяет проследить его логику и оценить целесообразность выбора его теоретико-методологического аппарата.

1. Анализ способов фиксации вариативного содержания в соответствии с различными подходами к обучению студентов показал эффективность применения компетентностного и деятельностного подходов.

Сравнивая способы описания вариативного содержания, Т. В. Живокоренцева приходит к выводу о том, что при «знаниевом» подходе они по сути являются нормативными – отражают требования к объему и качеству излагаемой информации, но не содержат «личностной» составляющей обучения ([9]). Подобная вариативность, по мнению автора, характерна для элективных курсов, где обучающиеся практически не могут изменять предлагаемое педагогом содержание.

Нами, напротив, избраны подходы, согласно которым задаются личностные качества студентов, рамочно определяющие образовательный результат, тогда как предметное содержание не фиксируется. При этом в деятельностном подходе в роли вариативной компоненты выступает содержание образования, а в компетентностном – различные ситуации педагогического взаимодействия участников образовательного процесса.

Считаем целесообразным руководствоваться положениями каждого из названных подходов, не ограничиваясь только одним из них. Компетентностный подход задает границы (ключевые компетенции), внутри которых разворачивается образовательный процесс, а деятельностный обеспечивает его гибкость и открытость за счет вариативности содержания обучения (проводя соответствующие аналогии, можно усмотреть здесь органическое единство категорий формы и содержания).

Формы педагогического взаимодействия с обучающимися в русле деятельностного и компетентностного подходов потребовали обращения к методам проблемного обучения, использования эвристических приемов, применения средств ИКТ для визуализации изучаемых объектов и организации численных экспериментов, а также приобщения студентов к регулярной научно-исследовательской деятельности как основополагающему элементу подготовки современного выпускника.

Заметим, что именно проблемно-ориентированный подход к организации учебного процесса назван «эффективным механизмом реализации междисциплинарности в образовании» [25, с. 89], а компетентностный подход, предполагающий, что «учебная деятельность фокусируется на результатах в виде некоторой совокупности компетенций, которые преимущественно имеют междисциплинарный характер» [25, с. 89], выделен в качестве инструмента ее реализации.

Кроме того, междисциплинарность в образовании подразумевает изменение его приоритетов, ориентацию на целостный потенциал развития обучающихся и сопряжение с их будущей профессиональной деятельностью. Это предполагает создание единого образовательного пространства (в вузе, конкретном государстве, во всем мире) и, следовательно, переход от фиксированного содержания программ изучаемых дисциплин к вариативному. Таким образом, в концепции предпринятого исследования нашли естественное отражение положения концепции междисциплинарности.

2. Определение вариативного содержания курса математического анализа осуществлялось на основе следующих принципов: вариативные компоненты должны

- органично дополнять изучение основных понятий, теорем и методов математического анализа;
- учитывать направление подготовки студентов, способствуя решению задач профессиональной направленности обучения;
- систематически переосмысляться и пересматриваться с учетом появления новых научных результатов, фактов и открытий;
- внедряться при условии готовности педагога и студентов к соответствующему обучению.

Последний принцип подразумевает должную осведомленность преподавателя об уровне математической подготовки студентов, их мотивации и способностях к самостоятельной деятельности. Это ограничивает внедрение вариативных компонент в содержание начального раздела исследуемой дисциплины – «Введение в анализ». Однако следующие разделы математического анализа, связанные с изучением дифференциального и интегрального исчислений функции одной действительной переменной, позволяют в полной мере использовать вариативность в практике обучения. Поэтому именно в них нами чаще всего используются компоненты вариативного содержания (таблица). Это дает возможность уже на младших курсах начинать развитие познавательной самостоятельности обучающихся и приобщать их к регулярной и неформальной исследовательской деятельности.

Вариативные компоненты в содержании вузовского курса математического анализа
Variable components in the content of the university course of mathematical analysis

Раздел	Изучаемая тема	Вариативное содержание
1	2	3
Введение в анализ	Теорема о предельном переходе в двойном неравенстве	Основное свойство среднего логарифмического в оценке промежуточной функции
Дифференциальное исчисление функции одной дей-	Понятия производной функции и дифференцируемой функции. Основные правила вычисления производных	Понятия дифференцируемости функции по Каратеодори, производной Каратеодори. Обоснование основных правил вычисления производных методом Каратеодори
	Теоремы о среднем значении для дифференци-	Теоремы Дарбу, Помпейю, Флетта, обобщения классических теорем

1	2	3
ствительной переменной	руемых функций	о среднем значении
	Правило Лопиталя – Бернулли	Обобщение теорем Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенностей
	Поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной, доказательство неравенств	Неравенства для средних величин в задачах на экстремум; классические неравенства в задачах оптимизации; метод неравенств решения уравнений
	Выпуклые функции и их свойства	Использование свойств выпуклых функций при решении уравнений и доказательстве неравенств; конструирование выпуклых функций без обращения к производным. Классы выпуклых функций (логарифмически, геометрически, гармонически выпуклые функции, *r*-выпуклые и экспоненциально выпуклые функции), их применения
Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	Несобственные интегралы	Несобственные интегралы в вопросе доказательства классических неравенств, их обобщений и уточнений
	Свойства определенного интеграла	Неравенство Эрмита – Адамара для выпуклых функций, его обобщения и применения
Вещественнозначные функции нескольких переменных	Основные теоремы дифференциального исчисления функций нескольких переменных	Основы дифференциального исчисления функций нескольких переменных в терминах дифференцируемости функции по Каратеодори
	Условный экстремум функции нескольких переменных	Классические неравенства в задачах на условный экстремум

Внедрение обозначенных вариативных компонент в обучение математическому анализу потребовало детальной разработки их содержательных и методических аспектов. Поскольку предпринятое исследование отличается продолжительностью во времени, перечень работ авторов по представленной проблематике весьма обширен (несколько десятков). Ограниченный объем статьи не позволяет цитировать большинство из них, однако компоненты вариативного содержания, перечисленные в таблице, могут служить ориентиром при поиске соответствующих публикаций, например, на сайте научной электронной библиотеки elibrary.ru. Часть из них дает возможность оценить фундаментальность описываемого исследования и его обширную гуманитарную составляющую [14–16, 26–28].

Возможное содержательное наполнение представленных в таблице вариативных компонент рассмотрим на примере изложения основ дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных, основанном на подходе Каратеодори. Данный подход в сравнении с традиционным, восходящим к понятию производной функции в точке по Коши, обладает рядом особенностей. В частности, для установления основных теорем дифференциального исчисления и ряда других утверждений в нем используются элементарно-алгебраические рассуждения, а не операция предельного перехода. В этой связи подход Каратеодори к изложению соответствующих вопросов «гладкого» анализа не является общепринятым, однако он весьма рационален и доступен, в том числе для учащихся общеобразовательных школ.

В настоящей статье изложим лишь некоторые моменты, отражающие логику освоения соответствующих разделов анализа (подробнее см. [29]). Обратимся сначала к разделу «Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной».

Определение 1. Функцию f, определенную в окрестности $u(x_0)$ точки x_0, назовем *дифференцируемой по Каратеодори* в этой точке, если существует такая определенная на рассматриваемой окрестности и непрерывная в точке x_0 функция $\Phi(x)$, что на $u(x_0)$ будет иметь место представление

$$f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0). \tag{1}$$

Для иллюстрации определения установим, к примеру, дифференцируемость по Каратеодори функции $y = x^2$ в произвольной точке x_0. Поскольку $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$, $x \in \mathbf{R}$, форма (1) соблюдена, роль $\Phi(x)$ выполняет функция $x + x_0$, определенная на $\mathbf{R}$ и непрерывная в точке x_0.

Будет полезно отработать определения дифференцируемости функции в точке по Коши и по Каратеодори на других упражнениях.

Следует обратить внимание на то, что и условие дифференцируемости по Коши, и условие дифференцируемости по Каратеодори функции в точке влекут непрерывность функции в этой точке. Однако важно подчеркнуть, что непрерывность функции не является достаточным условием ее дифференцируемости. Сказанное можно подтвердить обращением к функции $y = |x|$, непрерывной в точке $x = 0$, но не дифференцируемой в ней ни по Коши, ни по Каратеодори.

Понятие дифференцируемости функции в точке по Каратеодори позволяет обобщить известную теорему о необходимых и достаточных условиях существования производной функции в точке. Приведем ее «новую» формулировку.

Теорема (критерий Коши – Каратеодори). *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную.*
2. *Функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема по Коши.*
3. *Функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема по Каратеодори.*

При выполнении любого из трех приводимых условий для производной $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 имеют место равенства

$$f'(x_0) = A = \Phi(x_0),$$

где *A – константа, характеризующая условие дифференцируемости функции f в точке x_0 по Коши;*

Φ – *функция, характеризующая условие дифференцируемости данной функции в рассматриваемой точке по Каратеодори.*

Доказательство данной теоремы детально рассмотрено в одной из наших публикаций [29]. Ясно, что функцию, имеющую производную в точке, можно называть *дифференцируемой* (по Коши или по Каратеодори) в этой точке.

Определение 2. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая в точке x_0 функция, т. е. для нее имеет место представление (1). Функцию $\Phi(x)$, участвующую в этом представлении, назовем *производной по Каратеодори* функции f в точке x_0. Условимся обозначать ее символами $\hat{f}(x)$ или $\hat{f}_{x_0}(x)$ в зависимости от того, подчеркивается ее связь с точкой x_0 или нет.

Введенное понятие можно интерпретировать геометрически [29].

Заметим, что если производная Коши $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 есть число, то производная Каратеодори $\hat{f}_{x_0}(x)$ этой функции в данной точке есть функция переменной x. При этом согласно теореме $f'(x_0) = \hat{f}_{x_0}(x_0)$.

В качестве иллюстрации определения 2 найдем, к примеру, производную степенной функции с натуральным показателем. Так как $x^n - x_0^n = \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)\left(x - x_0\right)$, то производная Каратеодори функции $y = x^n (n \in \mathbf{N})$ в точке x_0 есть функция $\hat{y} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$. Для нее выполняется условие $\hat{y}(x_0) = nx_0^{n-1}$. Так как $\hat{y}(x_0) = y'(x_0)$, то имеем формулу: $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

Замечание. Работа, в которой впервые было введено понятие производной Каратеодори [30], вышла в свет уже после смерти автора.

Дальнейшая логика изложения раздела предусматривает изучение основных правил вычисления производных. Ради экономии места остановимся лишь на установлении правила дифференцирования сложной функции согласно подходу Каратеодори.

Теорема. *Пусть функция f определена в окрестности $u(x_0)$ точки x_0, а функция g – в окрестности $v(y_0)$ точки y_0 ($y_0 = f(x_0)$), при этом $f(u(x_0)) \subset v(y_0)$. Если функция f дифференцируема в точке x_0, а g – в точке y_0, то композиция $g \circ f$ функций f и g дифференцируема в точке x_0, при этом*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы функция $g \circ f$ определена в окрестности $u(x_0)$. Поскольку функция f дифференцируема в точке x_0, то для $x \in u(x_0)$ имеем: $f(x) - f(x_0)\hat{f}(x)(x - x_0)$. Из дифференцируемости функции g в точке y_0 следует представление $g(y) - g(y_0) = \hat{g}(y)(y - y_0)$ для $y \in v(y_0)$. Подставив в него $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$, получим:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \hat{g}(f(x))(f(x) - f(x_0)).$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = \hat{g}(f(x))\hat{f}(x)(x - x_0).$$

По теореме о непрерывности композиции функций функция $\hat{g}(f(x))\hat{f}(x)$ непрерывна, следовательно, это функция $(g \,\hat{\circ}\, f)(x)$. Имеем соотношение $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = (g \,\hat{\circ}\, f)(x)(x - x_0)$, устанавливающее дифференцируемость композиции $(g \circ f)$ в точке x_0.

Вычислим производную функции $g \circ f$ в точке x_0:

$$(g \circ f)'(x_0) = (g \,\hat{\circ}\, f)(x_0) = \hat{g}(f(x_0))\hat{f}(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Формула (2) установлена.

Понятие производной Каратеодори может быть использовано при доказательстве и других теорем рассматриваемого раздела анализа, к примеру, для обоснования необходимого условия нестрогой монотонности дифференцируемой на промежутке функции.

Опишем теперь элементы вариативного содержания в изложении дифференциального исчисления действительнозначных функций нескольких действительных переменных на основе подхода Каратеодори (для краткости изложения условимся рассматривать лишь функции двух независимых переменных).

Пусть $z = f(x, y)$ – действительная функция переменных x и y, определенная в окрестности $u(M_0) = \left\{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \delta > 0\right\}$ точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 3. Функцию f будем называть *дифференцируемой по Каратеодори* в точке M_0, если существуют такие определенные на рассматриваемой окрестности $u(M_0)$ функции $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$, непрерывные в точке M_0, что на $u(M_0)$ имеет место представление

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Phi(x, y)(x - x_0) + \Psi(x, y)(y - y_0). \qquad (3)$$

Данное определение полезно сравнить с определением диффренцируемости функции двух переменных в точке по Коши, а также отработать на различных упражнениях. Справедлива следующая теорема.

Теорема (многомерная теорема Коши – Каратеодори). *Понятия дифференцируемости функции f в точке M_0 по Коши и по Каратеодори эквивалентны, т. е. если функция f дифференцируема в точке M_0 по Коши, то она в этой точке дифференцируема и по Каратеодори, и наоборот.*

Ее доказательство также представлено в нашей публикации [29]. В силу рассмотренной теоремы тип дифференцируемости (по Коши или по Каратеодори) функции в точке можно не уточнять.

Поскольку дифференцируемость функции f в точке M_0 по Коши влечет ее непрерывность в этой точке, а также существование частных производных, то естественно определить частные производные Каратеодори функции f.

Пусть $z = f(x, y)$ – дифференцируемая в точке M_0 функция. Тогда для нее в окрестности M_0 имеет место представление (3). Функцию $\Phi(x, y)$ в (3) назовем *частной производной Каратеодори* функции f в точке M_0 по первой переменной, а функцию $\Psi(x, y)$ – аналогичной производной по второй переменной. Обозначим их соответственно символами $\hat{f}_x$, $\hat{z}_x$, $\hat{f}_x(x, y)$, $\hat{f}_y$, $\hat{z}_y$, $\hat{f}_y(x, y)$ или $\hat{f}_{x,M_0}(x, y)$, $\hat{f}_{y,M_0}(x, y)$, если подчеркивается связь с точкой M_0.

Нетрудно заметить, что для дифференцируемой в точке M_0 функции f справедливы равенства $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \hat{f}_{x,M_0}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \hat{f}_{y,M_0}(x_0, y_0)$. Очевидно также, что полный дифференциал $df\left(M_0\right)=\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}dy$ может быть выражен через частные производные Каратеодори так:

$$df\left(M_0\right)=\hat{f}_{x,M_0}\left(x_0,y_0\right)dx+\hat{f}_{y,M_0}\left(x_0,y_0\right)dy\ .$$

На основе введенных понятий можно обосновать формулы для частных производных сложной функции нескольких переменных в случаях, когда у такой функции промежуточных переменных одна или несколько, установить теорему о достаточных условиях существования производной по направлению, вывести уравнение касательной плоскости к гладкой поверхности (см. [29]).

Представленные материалы позволяют сделать вывод о том, что большинство принципиальных вопросов дифференциального исчисления вещественных функций одной и нескольких вещественных переменных можно успешно рассматривать посредством методов, восходящих к понятиям дифференцируемой по Каратеодори функции в точке, частных производных функции в точке по Каратеодори.

Понятие производной является одним из основных в математическом анализе, осмысляемым в различных контекстах и нашедшим множество приложений. Полезность освоения подхода Каратеодори объясняется рядом причин. Во-первых, это расширяет известные студентам способы толкования производной (геометрический, физический, экономический и др.). Во-вторых, полученный опыт в дальнейшем помогает обучающимся более естественно воспринимать обобщения понятия производной при изучении таких дисциплин, как «Методы оптимизации» и «Функциональный анализ». В-третьих, это дает возможность демонстрировать будущим учителям математики альтернативное построение курса алгебры и начал математического анализа.

Таким образом, подход Каратеодори разумно использовать в изложении дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных для студентов различных направлений подготовки. Это явилось аргументом при решении вопроса о том, на содержании каких вариативных компонент целесообразно остановиться в настоящей работе более обстоятельно.

3. Как уже было отмечено, в эксперименте по внедрению вариативных компонент в изучение математического анализа принимали участие студенты ВятГУ следующих направлений подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 44.03.01 Педагогическое образование, профили Мате-

матика, Информатика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата), 02.04.01 Математика и компьютерные науки, направленность Алгебра и дискретная математика, 44.04.01 Педагогическое образование, направленность Математика (уровень магистратуры). Из-за продолжительности эксперимента считаем нецелесообразным указывать здесь все шифры специальностей и направлений подготовки, поскольку они не раз менялись (указанные действуют в настоящее время), однако приведенный перечень дает представление о составе участников эксперимента.

Магистранты включены нами в программу исследования по той причине, что они всегда являлись активными участниками студенческого научного семинара по математическому анализу, культивирование которого мы считаем одним из главных условий эффективности эксперимента. Его функционирование предполагает дополнительную аудиторную нагрузку для всех участников, но при этом решает несколько важных задач:

- в рамках семинара обсуждаются вопросы, восходящие к современным направлениям развития математического анализа и его приложений;
- он служит площадкой для предъявления и обсуждения результатов самостоятельных исследований студентов, презентаций их докладов на предстоящих конференциях и пр.;
- студенты приобретают опыт публичных выступлений, учатся практике ведения научной дискуссии – овладевают ценными для современного выпускника компетенциями;
- осуществляется взаимодействие обучающихся различных направлений и уровней подготовки.

Нельзя упускать из внимания и временной фактор: сокращение количества аудиторных часов, выделяемых на освоение математических дисциплин, снижает качество учебной подготовки. Семинар эффективно дополняет лекционные и практические занятия: с одной стороны, он гарантирует преподавателю определенную свободу при распределении часов, отводимых на ту или иную тему, а с другой – обеспечивает глубокое погружение студентов в изучение дисциплины и их вовлеченность в систематическую самостоятельную работу.

Студенческий научный семинар по математическому анализу, о котором идет речь, функционирует в ВятГУ с 1994 г. (подробнее см. [31, 32]). Отметим, что к участию в его работе привлекаются все желающие. Это позволяет заслушивать, в частности, доклады преподавателей естественно-научных дисциплин, информатики, встречаться с координаторами математических олимпиад и популяризаторами науки. Данное направление деятельности решает задачу формирования профессиональной компетентности студентов, развития их научного мировоззрения и повышения математической культуры.

4. На заключительном этапе исследования осуществлялась оценка результатов проведенного эксперимента по внедрению вариативных компонент в содержание обучения математическому анализу. Опрос студентов, а также наблюдение за их деятельностью на аудиторных занятиях и в работе научного семинара показали, что выделять для конкретного направления подготовки обучающихся «приоритетное» вариативное содержание обсуждаемой дисциплины нецелесообразно. Данное обстоятельство можно объяснить тем, что у студентов одного и того же направления подготовки стили мышления могут быть как во многом схожими, так и различными.

Основным методом оценивания степени эффективности эксперимента стал анализ результатов учебной и научно-исследовательской деятельности студентов. В статье перечислить все студенческие исследования невозможно. Отметим лишь, что на данный момент в условиях освоения вариативного содержания математического анализа обучающимися успешно защищено более ста курсовых и выпускных квалификационных работ, выполнен ряд магистерских диссертаций. Исследования, начатые в рамках участия в деятельности семинара, послужили основой для подготовки нескольких кандидатских диссертаций[1].

Несколько десятков студенческих работ, многие из которых сопряжены с выступлениями их авторов на научных конференциях различного уровня, опубликованы в рецензируемых периодических изданиях. Большинство из них представлены в одной из наших статей, где систематизирована научная деятельность студентов по тематике исследований, указаны специальности и направления подготовки авторов публикаций [32]. Назовем лишь некоторые из тех, что выполнены после выхода указанной статьи. Поскольку большинство из них размещено в цитируемых журналах, таких как «Вестник Сыктывкарского университета», «Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона», с их содержанием можно ознакомиться

[1] Панкратова Л. В. Формирование исследовательских умений в обучении математике учащихся общеобразовательных школ средствами неравенств: дис. ... канд. пед. наук. Киров, 2014. 219 с.; Соколова А. Н. Методика использования компьютерного эксперимента в процессе преподавания математического анализа в условиях модульной системы обучения: дис. … канд. пед. наук. Киров, 2012. 153 с.; Шилова З. В. Факультативный курс «Средние величины» для учащихся старших классов средней общеобразовательной школы: дис. … канд. пед. наук. Киров, 2003. 196 с.

на сайте научной электронной библиотеки elibrary.ru. Названия публикаций соотносятся с компонентами вариативного содержания: производная Каратеодори[1], теорема Помпейю о среднем значении[2], метод неравенств решения уравнений[3], а также вопросы характеризации различных классов выпуклых функций[4].

---

[1] Калинин С. И., Чиркова Л. Н. Верхняя и нижняя производные Каратеодори в доказательствах некоторых теорем негладкого анализа // Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы V Всерос. науч.-практ. конф. Глазов, 2015. С. 58–60; Калинин С. И., Чиркова Л. Н. Характеризация негладких функций // Математическое образование: прошлое, настоящее, будущее: сб. трудов VI Всерос., III Междунар. заочной науч.-практ. конф., посв. 100-летию со дня рождения К. А. Малыгина. Самара, 2015. С. 25–29; Калинин С. И., Чиркова Л. Н. Негладкие функции: аспект характеризации // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Вып. 18. Киров, 2016. С. 73–82.

[2] Калинин С. И., Дозморов А. В. Теорема Помпейю и ее обобщение // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1 (22). С. 72–78; Суслопарова Ю. А. Одно обобщение теоремы Помпейю // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. всерос. науч.-практ. конф. студентов матем. фактов с междунар. участием. Вып. 12. Пермь, 2019. С. 20–21.

[3] Вычегжанин С. В. Алгебраическое доказательство формулы Тейлора // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона.: период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Вып. 17. Киров, 2015. С. 66–76; Демина С. С., Калинин С. И., Соколова А. Н. Неравенство Коши в реализации метода отделяющей функции при решении уравнений // Там же. Вып. 18. Киров, 2016. С. 252–260.

[4] Анфертьева Е. А. Исправление некоторых результатов, касающихся свойств гармонически выпуклых и гармонически логарифмически выпуклых функций // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: материалы всерос. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов. Пермь, 2017. Вып. 10. С. 19; Анфертьева Е. А., Калинин С. И. Некоторые свойства гармонически выпуклых и гармонически логарифмически выпуклых функций // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Вып. 19. Киров, 2017. С. 28–35; Калинин С. И., Леонтьева Н. В. Использование (1/2; 1)-выпуклых функций при решении некоторых иррациональных уравнений // Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики: сб. науч. и науч.-практ. ст. VI Всерос. науч.-практ. конф. Глазов, 2018. С. 59–63; Калинин С. И., Леонтьева Н. В. (1/2; 1)-выпуклые функции. Ч. I // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 97–104; Калинин С. И., Соколова Д. А. Конструирование выпуклых функций без обращения к производным // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Вып. 21. Киров, 2019. С. 146–153; Кибешева И. Р., Одякова В. С., Протасов Н. С., Рогожникова Ю. И. r-выпуклые функции, их некоторые свойства и применения // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: материалы всерос. науч.-практ. конф. студентов матем. фактов с междунар. участием. Пермь, 2019. Вып. 12. С. 12–13; Соколова Д. А. Конструирование выпуклых функций без обращения к производным //Там же. С. 19–20.

Опрос студентов, участвующих в работе научного семинара по математическому анализу, подтвердил исключительную полезность их регулярной самостоятельной работы в ходе изучения соответствующей дисциплины. Респонденты отметили не только рост своих знаний по предмету и закономерное повышение успеваемости, но и углубление понимания междисциплинарных связей, овладение методами ведения научного исследования, расширение собственного научного кругозора. Эти данные подтверждают успешность экспериментальной деятельности по внедрению компонент вариативного содержания в обучение студентов математическому анализу.

Обсуждение и заключения

Целью нашего исследования являлись конструирование содержания вариативных компонент курса математического анализа для ряда направлений подготовки студентов вуза и обобщение результатов внедрения этих компонент в практику обучения. Осмыслим основные итоги и возможные перспективы работы.

1. Проведено глубокое изучение феномена вариативности и проблем вариативного математического образования. Показано, что именно вариативное содержание обучения выступает системообразующим фактором вариативного образования, определяя методы, средства и формы его реализации.

2. Модель вариативного обучения согласована с тенденциями современных образовательных реформ, а ее структура осмыслена с позиций актуальных методических концепций и подходов к обучению. Не повторяя того, что обстоятельно изложено в разделе «Результаты исследования», позволим себе уточнить некоторые аспекты взаимодействия выстроенной модели вариативного обучения студентов математическому анализу с механизмами междисциплинарности и транспрофессионализма.

Истоки систематических отечественных исследований междисциплинарности в обучении связаны с введением в образовательную практику понятий межпредметных связей и межпредметной интеграции. За рубежом активное изучение междисциплинарности и путей внедрения ее в образование велось во второй половине XX в. (см., например, [33–35]). На данном этапе осуществлялось формулирование и уточнение терминологии междисциплинарности, обоснование ее методологии, выявление достоинств и недостатков для практики обучения. Более современные публикации иностранных авторов по данной тематике чаще всего описывают результаты эмпирических исследований эффективности отдельных междисциплинарных программ либо содержат анализ актуальных проблем междисциплинарности [36–38].

Сегодня феноменология и таксономия междисциплинарности пересматриваются, ее понимание трансформируется вслед за изменениями, происходящими в обществе. В связи с этим междисциплинарность нередко осмысляют как следствие смены социальных функций науки: непосредственное включение в решение проблем, определяющих настоящее и будущее цивилизации, требует от ученых все более ответственного отношения к своей деятельности. Действительно, современные программы социального и экономического развития отличаются масштабностью, для их реализации необходимы междисциплинарные усилия множества специалистов, каждый из которых обязан отвечать за полученный результат. Такое понимание тенденции междисциплинарности адекватно и точно отражает истинные цели образования, в том числе математического.

Вариативное обучение в контексте компетентностного подхода и при обязательной самостоятельной научно-исследовательской деятельности обучающихся сопряжено с их способностью управлять индивидуальными траекториями развития. Данный тезис прямо коррелирует с положениями методологии транспрофессионализма, в числе индикаторов которого П. В. Малиновский выделяет:

- способность к коммуникации с представителями различных профессий;
- способность синтезировать знания из различных областей;
- ориентацию на взаимосвязь фундаментальных знаний и практического опыта;
- умение работать в команде;
- готовность к непрерывному самообразованию;
- вхождение в профессиональное сообщество [39, с. 23].

Предлагаемая модель вариативного обучения математическому анализу, включающая организацию научного студенческого семинара в качестве эффективной формы работы, визуализирует все перечисленные индикаторы транспрофессионализма.

3. На основе изучения учебной, научной и научно-методической литературы по математическому анализу определены и разработаны компоненты его вариативного содержания, которые в течение многих лет использовались в учебном процессе ВятГУ. Экспериментом были охвачены студенты нескольких направлений подготовки (будущие педагоги, математики-исследователи, математики-прикладники) с обязательным их вовлечением в самостоятельную научно-исследовательскую деятельность.

Широта экспериментальной работы поддерживалась механизмами междисциплинарности предпринятого исследования, сопряженными с отходом от фиксированного содержания обучения и обращением к компетентностному и проблемно-ориентированному подходам, что обеспечило научную новизну изыскания.

4. Для оценки результатов эксперимента использовались эмпирические и праксиметрические методы. Наблюдение, опрос обучающихся и анализ продуктов их деятельности (в особенности публикаций в периодических изданиях, выступлений на конференциях и семинарах) показали эффективность реализуемой модели вариативного обучения математическому анализу в контексте формирования профессиональных компетенций будущих выпускников.

5. Теоретическую значимость исследования мы связываем с проблематикой дальнейшего совершенствования предложенной модели обучения, поскольку вариативное содержание любой дисциплины требует регулярного переосмысления. В этой связи разработанная модель обучения становится открытой, возможно изменение ее содержания в зависимости от потребностей участников образовательного процесса, что, очевидно, отвечает модульному принципу формирования дисциплин вуза.

Практическая ценность настоящей работы видится в систематизации материалов, составляющих вариативное содержание обучения математическому анализу в вузе, и их представлении научному сообществу. Данные материалы могут быть полезны для преподавателей вузов, осуществляющих обучение как учителей математики, так и студентов-математиков других направлений подготовки.

Список использованных источников

1. Ивахненко Е. Н., Аттаева Л. И. Высшая школа: взгляд за горизонт // Высшее образование в России. 2019. № 3. С. 21–34.

2. Токтарова В. И., Федорова С. Н. Модель математической подготовки студентов в условиях реализации ФГОС ВО // Сибирский педагогический журнал. 2016. № 5. С. 78–86.

3. Перминов Е. А. Методологические принципы математической подготовки педагогов профессионального обучения // Образование и наука. 2013. № 5 (104). С. 36–53.

4. Елецких И. А., Сафронова Т. М., Черноусова Н. В. Изучение дисциплины «Математический анализ» в условиях реализации ФГОС ВО: проектирование учебного процесса и методические особенности преподавания // Современные проблемы науки и образования. 2018. № 4. С. 13 [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_36344809_77838876.pdf (дата обращения: 30.04.2019).

5. Пучков Н. П. К вопросу реализации современной концепции развития математического образования в Российской Федерации // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума по математическому образованию 18–22 октября 2017 г. (XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, VII Международная научно-практическая конференция «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU–2017)») / отв. ред. Л. Р. Шакирова. Казань: Изд-во Казанского университета, 2017. Т. 1. С. 71–74.

6. Кутузов В. М., Лысенко Н. В. Вариативное образование – стратегия развития вуза // Современное образование: содержание, технологии, качество: материалы XXIII Международной научно-методической конференции. 21 апреля 2017 г. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина). 2017. Т. 1. С. 3–6.

7. Зеер Э. Ф., Сыманюк Э. Э. Методологические ориентиры развития транспрофессионализма педагогов профессионального образования // Образование и наука. 2017. Т. 19, № 8. С. 9–28.

8. Санина Е. И., Маскаева А. М. Вариативное обучение как одно из направлений модернизации образования // Преподаватель XXI век. 2010. № 4–1. С. 7–10.

9. Живокоренцева Т. В. Теоретико-методологические и социокультурные аспекты вариативности образования // Научно-педагогический журнал Восточной Сибири «MagisterDixit». 2012. № 4. С. 205–216.

10. Левит М. В. Универсальное образование – ценность нашего времени // Образовательная политика. 2010. № 5–6 (43). С. 34–46.

11. Игнатова О. Г. Современная модель применения электронного обучения при преподавании математического анализа в педагогическом вузе // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. 2016. № 3 (37). С. 47–53.

12. Шакирова Д. У., Усова Л. Б. Опыт внедрения интерактивных методов обучения бакалавров направления подготовки «Математика и компьютерные науки» // Современные проблемы науки и образования. 2018. № 6. С. 233 [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_36871163_99543740.pdf (дата обращения: 30.04.2019).

13. Долгополова А. Ф., Шмалько С. П. Особенности преподавания профессионально ориентированного курса математики для студентов экономических направлений // Современное образование. 2017. № 4. С. 39–47.

14. Калинин С. И., Панкратова Л. В. Выпуклые функции как метапредметная составляющая математической подготовки магистрантов педагогического образования // Перспективы науки и образования. 2018. № 5 (35). С. 240–251.

15. Калинин С. И. Обучение студентов математическому анализу в условиях фундаментализации высшего педагогического образования: монография. Киров: ВятГГУ, 2008. 353 с.

16. Калинин С. И., Ястребов А. В. Избранные вопросы математического анализа и методики его преподавания: деятельностный аспект: монография. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2015. 257 с.

17. Alomari M., Darus M. The Hadamard's inequality for s-convex functions // International Journal of Mathematical Analysis. 2008. Vol. 2, № 13–16. P. 639–646.

18. Dragomir S. S. Inequalities of Hermite-Hadamard type for HG-convex functions // Проблемы анализа – Issues of Analysis. 2017. Vol. 6 (24), № 2. P. 25–41.

19. Fang Z. B., Shi R. On the (p, h)-convex function and some integral inequalities // Journal of Inequalities and Applications. 2014. Available from: https://core.ac.uk/download/pdf/81536141.pdf (date of access: 16.04.2019).

20. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some inequalities for geometrically-arithmetically h-convex functions // Creative Mathematics and Informatics. 2014. Vol. 23, № 1. P. 91–98.

21. Sandor J. A note on log-convexity of the power means // Annales Mathematicae et Informaticae. 2015. Vol. 45. P. 107–110.

22. Zhangand X.-M., Zheng N.-G. Geometrically convex functions and estimation of remainder terms for Taylor expansion of some functions // Journal of Mathematical Inequalities. 2010. Vol. 4, № 1. P. 15–25.

23. Zhao Y. X., Wang S. Y., Uria L. Coladas. Characterizations of r-Convex Functions // Journal of Optimization Theory and Applications. 2010. Available from: https://link.springer.com/article/10.1007/s10957–009–9617–1 (date of access: 29.04.2019).

24. Киселева Е. Что и требовалось доказать: ученые объясняют, почему современному человеку не обойтись без математики [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://special.theoryandpractice.ru/math (дата обращения: 28.05.2019).

25. Сенашенко В. С. Междисциплинарность образования как отражение междисциплинарности окружающего мира на любых уровнях его организации // Управление устойчивым развитием. 2016. № 3 (04). С. 79–85.

26. Калинин С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: учебное пособие по спецкурсу. Киров, 2002. 368 с.

27. Калинин С. И., Панкратова Л. В. Неравенства Эрмита – Адамара: образовательно-исторический аспект // Математическое образование. 2018. № 3 (87). С. 17–31.

28. Панкратова Л. В. Гуманитарный потенциал неравенств в реализации межпредметных связей математики // European Social Science Journal. 2013. № 9–2 (36). С. 121–129.

29. Калинин С. И. Об изложении основ дифференциального исчисления вещественнозначных функций одной и нескольких переменных в терминах понятия дифференцируемости функций по Каратеодори // Математическое образование. 2006. № 2 (37). С. 18–31.

30. Carathéodory C. Theory of Functions of a Complex Variable. Vol. 1. New York: Chelsea Publishing Company, 1954.

31. Калинин С. И. Студенческий научно-исследовательский семинар по математическому анализу в ВятГГУ в 2010–2011 гг. // Проблемы современного математического образования в вузах и школах России: Интерактивные формы обучения математике студентов и школьников. Материалы V Всерос. науч.-метод. конф. Киров: ВятГГУ, 2012. С. 148–154.

32. Калинин С. И. Студенческие исследования по математическому анализу в ВятГГУ // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2015. № 6. С. 147–153.

33. Gunn G. Interdisciplinary Studies // J. Gibaldi (ed). Introduction to Scholarship in Modern Language and Literatures. New York: Modern Language Association, 1992. P. 239–240.

34. McGrath E. J. Interdisciplinary studies: An integration of knowledge and experience // Change Report on Teaching. 1978. № 10 (7). P. 6–9.

35. Piaget J. L'épistémologie des relations interdisciplinaires // Apostel L., Berger G., Briggs A., Michaud G. (ed.). L'interdisciplinarité – Problèmes d'enseignement et de recherche, Centre pour la Recherche et l'Innovation dans l'Enseignement, Organisation de Coopération et de développement économique, Paris, 1972. P. 154–171.

36. Ausburg T. Becoming Interdisciplinary: An Introduction to Interdisciplinary Studies. 2nd edition. New York: Kendall / Hunt Publishing, 2006.

37. Knight D. B., Lattuca L. R., Kimball E. W., Reason, R. D. Understanding Interdisciplinarity: Curricular and Organizational Features of Undergraduate Interdisciplinary Programs // Innovative Higher Education. 2013. Vol. 38, № 2. P. 143–158.

38. Newell W. The State of the Field: Interdisciplinary Theory // Issues in Interdisciplinary Studies. 2013. № 31. P. 22–43.

39. Малиновскиий П. В. Вызовы глобальной профессиональной революции на рубеже тысячелетий // Российское экспертное обозрение. 2007. № 3 (21). С. 21–24.

References

1. Ivakhnenko E. N., Attayeva L. I. Higher School: Looking beyond the horizon. *Vyssheye obrazovaniye v Rossii = Higher Education in Russia.* 2019; 3: 21–34. (In Russ.)

2. Toktarova V. I., Fedorova S. N. Model of mathematical training of students in conditions of implementation of Federal State Educational Standards for Higher Education. *Sibirskiy pedagogicheskiy zhurnal = Siberian Pedagogical Journal.* 2016; 5: 78–86. (In Russ.)

3. Perminov E. A. Methodological principles of mathematical training of vocational training. *Obrazovaniye i nauka = The Education and Science Journal.* 2013; 5 (104): 36–53. (In Russ.)

4. Eletskikh I. A., Safronova T. M., Chernousova N. V. The study of the discipline “Mathematic Analysis” in the conditions of the implementation of Federal State Educational Standards for Higher Education: Design of the educational process and methodological peculiarities of teaching. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya = Modern Problems of Science and Education* [Internet]. 2018 [cited 2019 Apr 30]; 4: 13. Available from: https://elibrary.ru/download/elibrary_36344809_77838876.pdf (In Russ.)

5. Puchkov N. P. To the implementation of the modern concept of development of mathematical education in the Russian Federation. In: *N. I. Lobachevskij i matematicheskoe obrazovanie v Rossii: materialy Mezhdunarodnogo foruma po matematicheskomu obrazovaniju 18–22 oktjabrja 2017 g. (XXXVI Mezhdunarodnyj nauchnyj seminar prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov, VII Mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija “Matematicheskoe obrazovanie*

v shkole i vuze: teorija i praktika (MATHEDU–2017)") = N. I. Lobachevsky and Mathematical Design in Russia: Materials of the International Forum on Mathematical Education; 2017 Oct 18–22 (XXXVI International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Informatics of Universities and Pedagogical Universities, VII International Scientific and Practical Conference "Mathematical Education at School and University: Theory and Practice (MATHEDU-2017)"); 2017 Oct 18–22; Kazan. Ed. by. L. R. Shakirova. Kazan: Kazan University; 2017. V. 1. p. 71–74. (In Russ.)

6. Kutuzov V. M., Lysenko N. V. Variable education – strategy of university development. In: S*ovremennoe obrazovanie: soderzhanie, tehnologii, kachestvo: Materialy XXIII Mezhduna-rodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii. 21 aprelja 2017 g. = Modern Education: Content, Technologies, Quality. Materials of the XXIII International Scientific and Methodological Conference;* 2017 Apr 21; St. Petersburg. St. Petersburg: St. Petersburg State Electrotechnical University "LETI" named after V. I. Ulyanov (Lenin); 2017. V. 1. p. 3–6. (In Russ.)

7. Zeer E. F., Symanyuk E. E. Methodological reference points of development of transprofessionalism of teachers of vocational education. *Obrazovaniye i nauka = The Education and Science Journal.* 2017; 19 (8): 9–28. (In Russ.)

8. Sanina E. I., Maskayeva A. M. Variable training as one of the directions of educational training. *Prepodavatel' XXI vek = Teacher of the XXI Century.* 2010; 4–1: 7–10. (In Russ.)

9. Zhivokorentseva T. V. Theoretical-methodological and sociocultural aspects of educational activity. *Nauchno-pedagogicheskiy zhurnal Vostochnoy Sibiri "MagisterDixit" = Scientific and Pedagogical Journal of Eastern Siberia "MagisterDixit".* 2012; 4: 205–216. (In Russ.)

10. Levit M. V. Universal education is the value of our time. *Obrazovatelnaya politika. = Educational Policy.* 2010; 5–6 (43): 34–46. (In Russ.)

11. Ignatova O. G. Modern model of application of e-learning in teaching mathematical analysis at the pedagogical university. *Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Informatika i informatizatsiya obrazovaniya = Journal of the Moscow City Pedagogical University. Series: Informatics and Informatisation of Education.* 2016; 3 (37): 47–53. (In Russ.)

12. Shakirova D. U., Usova L. B. The experience of introduction of interactive methods of education of bachelor's degrees in Mathematics and Computer Sciences. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya = Modern Problems of Science and Education* [Internet]. 2018 [cited 2019 Apr 30]; 6: 233. Available from: https://elibrary.ru/download/elibrary_36871163_99543740.pdf (In Russ.)

13. Dolgopolova A. F., Shmalko S. P. The peculiarities of teaching a professionally oriented course of mathematics for students of economic directions. *Sovremennoye obrazovaniye = University Education.* 2017; 4: 39–47. (In Russ.)

14. Kalinin S. I., Pankratova L. V. Convex functions as a cross-curriculum component of mathematical training of masters of pedagogical education. *Perspektivy nauki i obrazovaniya = Prospects of Science and Education.* 2018; 5 (35): 240–251. (In Russ.)

15. Kalinin S. I. Obucheniye studentov matematicheskomu analizu v usloviyakh funda-mentalizatsii vysshego pedagogicheskogo obrazovaniya = Training of students in the mathematical analysis under the conditions of fundamentalisati-

on of higher pedagogical education. Kirov: Vyatka State Humanities University; 2008. 353 p. (In Russ.)

16. Kalinin S. I., Yastrebov A. V. Izbrannyye voprosy matematicheskogo analiza i metodiki ego prepodavaniya: deyatelnostnyy aspect = Selected questions of mathematical analysis and methods of its teaching: activity aspect. Kirov: Publishing House Raduga-PRESS; 2015. 257 p. (In Russ.)

17. Alomari M., Darus M. The Hadamard's inequality for s-convex functions. *International Journal of Mathematical Analysis.* 2008; 2 (13–16): 639–646.

18. Dragomir S. S. Inequalities of Hermite-Hadamard type for HG-convex functions. *Problemy analiza – Issues of Analysis* 2017; 6 (24), 2: 25–41.

19. Fang Z. B., Shi R. On the (p, h)-convex function and some integral inequalities. *Journal of Inequalities and Applications* [Internet]. 2014 [cited 2019 Apr 16]. Available from: https://core.ac.uk/download/pdf/81536141.pdf

20. Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U. Some inequalities for geometrically-arithmetically h-convex functions. *Creative Mathematics and Informatics.* 2014; 23 (1): 91–98.

21. Sandor J. A note on log-convexity of the power means. *Annales Mathematicae et Informaticae.* 2015; 45: 107–110.

22. Zhangand X.-M., Zheng N.-G. Geometrically convex functions and estimation of remainder terms for Taylor expansion of some functions. *Journal of Mathematical Inequalities.* 2010; 4 (1): 15–25.

23. Zhao Y. X., Wang S. Y., Uria L. Coladas. Characterizations of r-convex functions. *Journal of Optimization Theory and Applications* [Internet]. 2010 [cited 2019 Apr 29]. Available from: https://link.springer.com/article/10.1007/s10957–009–9617–1

24. Kiseleva E. Chto i trebovalos' dokazat': uchenye obyasnyayut, pochemu sovremennomu cheloveku ne obojtis' bez matematiki = What was required to prove: Scientists explain why a modern man cannot do without mathematics [Internet]. [cited 2019 May 28]. Available from: https://special.theoryandpractice.ru/math (In Russ.)

25. Senashenko V. S. The interdisciplinary nature of education as a reflection of the international nature of the world around it at all levels of its organisation. *Upravlenie ustojchivym razvitiem = Management of Sustainable Development.* 2016; 3 (04): 79–85. (In Russ.)

26. Kalinin S. I. Sredniye velichiny stepennogo tipa. Neravenstva Koshi i Ky Fana = Average values of the steppe type. Inequality of Cauchy and Ki-Fan. Kirov; 2002. 368 p. (In Russ.)

27. Kalinin S. I., Pankratova L. V. The Hermite–Hadamard inequality: Educational-historical aspect. *Matematicheskoe obrazovanie = Mathematical Education.* 2018; 3 (87): 17–31. (In Russ.)

28. Pankratova L. V. Humanitarian potential of inequality in realisation of cross-curriculum connections of mathematics. *European Social Science Journal = European Social Science Journal.* 2013; 9–2 (36): 121–129. (In Russ.)

29. Kalinin S. I. On the presentation of the basis of differential calculus of real-valued functions of one and several variables in terms of the concept of differentiability of Carathéodory functions. *Matematicheskoe obrazovanie = Mathematical Education.* 2006; 2 (37): 18–31. (In Russ.)

30. Carathéodory C. Theory of functions of a complex variable. Vol. 1. New York: Chelsea Publishing Company; 1954.

31. Kalinin S. I. Student research seminar on mathematical analysis at Vyatka State Humanities University in 2010–2011. In: *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovanija v vuzah i shkolah Rossii: Interaktivnye formy obuchenija matematike studentov i shkol'nikov. Materialy V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii = Problems of Modern Mathematical Education in Universities and Schools of Russia: Interactive Forms of Study in Mathematics of Students and Schoolchildren. Materials of the V All-Russian Scientific and Methodological Conference;* 2012; Kirov. Kirov: Vyatka State Humanities University; 2012. p. 148–154. (In Russ.)

32. Kalinin S. I. Student research on mathematical analysis at Vyatka State Humanities University. *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta = Bulletin of Vyatka State Humanities University.* 2015; 6: 147–153. (In Russ.)

33. Gunn G. Interdisciplinary studies. Introduction to scholarship in modern language and literatures. Ed. by J. Gibaldi. New York: Modern Language Association; 1992. p. 239–240.

34. McGrath E. J. Interdisciplinary studies: An integration of knowledge and experience. *Change Report on Teaching.* 1978; 10 (7): 6–9.

35. Piaget J. L'épistémologie des relations interdisciplinaires. Ed. by Apostel L., Berger G., Briggs A., Michaud Guy. L'interdisciplinarité – Problèmes d'enseignement et de recherché. Paris: Centre pour la Recherche et l'Innovation dans l'Enseignement, Organisation de Coopération et de développement économique; 1972. p. 154–171.

36. Ausburg T. Becoming interdisciplinary: An introduction to interdisciplinary studies. 2nd edition. New York: Kendall / Hunt Publishing; 2006.

37. Knight D. B., Lattuca L. R., Kimball E. W., Reason R. D. Understanding interdisciplinarity: Curricular and organizational features of undergraduate interdisciplinary programs. *Innovative Higher Education.* 2013; 38 (2): 143–158.

38. Newell W. The state of the field: Interdisciplinary theory. *Issues in Interdisciplinary Studies.* 2013; 31: 22–43.

39. Malinovskii P. V. Challenges of the global professional revolution at the turn of the millennium. *Rossijskoe ekspertnoe obozrenie = Russian Expert Review.* 2007; 3 (21): 21–24. (In Russ.)

Информация об авторах:

Калинин Сергей Иванович – доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Вятского государственного университета; ORCID http://orcid.org/0000–0001–5439–9414; Киров, Россия. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Панкратова Лариса Валерьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Вятского государственного университета; ORCID http://orcid.org/0000–0002–1242–3807; Киров, Россия. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Вклад соавторов:

С. И. Калинин – концепция исследования; разработка и апробация курса; критический анализ и доработка текста; осуществление научного руководства.

Л. В. Панкратова – сбор информационной базы; подготовка первоначального варианта статьи; визуализация данных в тексте.

Статья поступила в редакцию 29.05.2019; принята в печать 13.11.2019.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Information about the authors:

Sergey I. Kalinin – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University; ORCID http://orcid.org/0000–0001–5439–9414; Kirov, Russia. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Larisa V. Pankratova – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University; ORCID http://orcid.org/0000–0002–1242–3807; Kirov, Russia. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Contribution of the authors:

S. I. Kalinin – the research concept; development and approbation of the course; critical analysis and revision of the text; implementation of scientific guidance

L. V. Pankratova – data collection; preparation of the initial version of the article; visualisation of data in the text.

Received 29.05.2019; accepted for publication 13.11.2019.

The authors have read and approved the final manuscript.