

УДК 372.851

В. П. Кочнев

ПРОПЕДЕВТИКА ЯЗЫКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР И СХЕМ В УСЛОВИЯХ ПРОФИЛЬНОГО ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБУЧЕНИЯ В ШКОЛЕ

Аннотация. Предметом статьи является процесс профильного естественнонаучного обучения в школе, основной темой – взаимосвязь успеваемости учащихся по математике и уровня их включенности в творческую деятельность на занятиях по решению задач естественнонаучного содержания. Цель работы заключалась в том, чтобы показать влияние математических структур и схем на эффективность учебно-творческой деятельности учащихся классов естественнонаучного профиля в ходе их обучения математике.

В статье дана сравнительная характеристика задачного, проблемного и модельного подходов к решению математических задач, обсуждены результаты экспериментального исследования эффективности математической подготовки в соответствии с этими подходами, показаны особенности моделирования проблемных задач. Автором рассмотрены также способы стимулирования творческой активности учащихся и мотивирования их к получению новых знаний, к поиску новых математических закономерностей в проблемных ситуациях естественнонаучного содержания. Особо отмечена роль олимпиадных и нестандартных задач, которые расширяют кругозор учащихся, развивают творческое мышление и творческие способности.

Предложенная методика показала целесообразность включения в структуру занятий по подготовке к ЕГЭ решение олимпиадных и нестандартных (проблемных) задач. Апробация методики подтвердила, что она способствует получению высоких результатов на государственной аттестации по математике и развитию творческих способностей школьников.

Ключевые слова: пропедевтика, нестандартная задача, математическая структура, задачный подход, проблемный подход, модельный подход, динамическая структура, активность учащихся, преемственность обучения, естественнонаучное содержание.

Abstract. The paper looks at the teaching process at schools of the natural sciences profile. The subject of the research is devoted to the correlations between the students' progress and the degree of their involvement in creative activities of problem solving in the natural sciences context. The research is aimed to demonstrate the reinforcement of students' creative learning by teaching mathematical schemes and structures.

The comparative characteristics of the task, problem and model approaches to mathematical problem solving are given; the experimental data on the efficiency of mathematical training based on the above approaches being discussed, as well as the

specifics of modeling the tasks for problem solving. The author examines the ways for stimulating the students' creative activity and motivating the knowledge acquisition, and search for the new mathematical conformities related to the natural science content. The significance of the Olympiad and other non-standard tasks, broadening the students' horizons and stimulating creative thinking and abilities, is emphasized.

The proposed method confirms the appropriateness of introducing the Olympiad and non-standard problem solving into the preparatory training curricula for the Unified State Examinations.

Index terms: propaedeutics, non-standard problem, mathematical structure, task approach, problem-solving approach, model approach, dynamic structure, students' activity, continuity teaching, natural sciences content.

Введение единого государственного экзамена (ЕГЭ) привело к очередной ревизии содержания школьного математического образования и инициировало новые научно-теоретические исследования, посвященные роли и функциям задач школьной и элементарной математики. Вместе с тем успешная математическая подготовка в вузе связана с решением нестандартных задач, содержание которых сложнее элементарной и тем более школьной математики.

Известно, что нестандартными считаются задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точный алгоритм их решения. Обычно решение нестандартных задач, особенно в системе профильного обучения, состоит в сведении их путем преобразования, моделирования или переформулировок к стандартным задачам или же в разбиении на стандартные подзадачи.

Действительно, как справедливо отмечает Н. Х. Розов, содержание обучения алгебре и началам математического анализа в школьных программах по математике осталось на уровне математики времени Ньютона, а по геометрии – на уровне древнегреческой математики [9]. В связи с этим актуальной становится проблема преемственности обучения математике между школой и вузом.

Анализ математической и педагогической литературы показывает, что важным условием следования принципу преемственности является включение в содержание обучения математических структур и схем, вызывающих наибольшие затруднения у первокурсников вузов.

А. Н. Колмогоров подчеркивал, что во главе любого обучения математике должны находиться математические структуры (группы, полугруппы, кольца, поля, числа и т. д.) [6]. Необходимо заметить, что тип обучения характеризуется прежде всего используемыми в нем методами.

Укажем одну из наиболее известных классификаций методов обучения, предложенную И. Я. Лернером и М. Н. Скаткиным. Она связана с характером познавательной деятельности учащихся и включает следующие методы:

- объяснительно-иллюстративный;
- инструктивно-репродуктивный;
- проблемного изложения (эвристический);
- частично-полевой;
- исследовательский [11].

Основанием классификации служит степень самостоятельности учащегося – каждый последующий метод соответствует ее возрастанию.

Характеристика типа обучения зависит от видов используемых при его реализации задач и упражнений и описания процесса их решения. Так, в характеристике традиционного обучения, которому стали приписывать только передачу знаний и способов деятельности в «готовом» виде, всячески подчеркивается, что деятельность обучающегося сводится к решению типовых задач и упражнений по заданным образцам и алгоритмам, т. е. носит репродуктивный характер.

В зависимости от степени самостоятельности учащегося предлагается два варианта поэтапного решения задач.

Вариант первый:

- ознакомление с условиями задачи и планом (алгоритмом) действий, осуществляемое учителем;
- выполнение учебных действий в соответствии с заданным планом;
- контроль выполняемых действий со стороны учителя, постепенно переходящий в самоконтроль;
- оценивание и анализ получаемых результатов под руководством учителя.

Вариант второй:

- изучение содержания задачи с целью определения ее типа;
- воспроизведение в памяти способа (правила, алгоритма), с помощью которого решаются задачи данного типа;
- составление плана решения;
- реализация плана решения;
- сверка полученного результата с заданными ответами (или осуществление проверки в соответствии с заданной инструкцией).

В сложившемся процессе решения учебной задачи В. В. Давыдов выделяет следующие учебные действия [5]:

- осуществляемая с помощью учителя или самостоятельно постановка учебной задачи;
- преобразование условий задачи с целью обнаружения всеобщего отношения изучаемого объекта;
- моделирование выделенного отношения в предметной, графической и буквенной формах;
- преобразование модели отношения для улучшения ее свойств;
- построение частных задач, решаемых общим способом;
- контроль за выполнением предыдущих действий;
- оценка усвоения общего способа как результата решения данной учебной задачи [5].

Задачи могут естественным образом возникать в любой человеческой деятельности, как практической, так и познавательной. Решение каждой практической задачи, особенно естественнонаучного содержания, всегда направлено на достижение вполне конкретных изменений в предмете учебной деятельности учащегося. Итогом такого решения, как правило, становится некий материальный продукт.

Свернутые в задачах результаты предметной деятельности могут иметь разную степень «прозрачности», а значит, учебно-предметные задачи естественнонаучного содержания способствуют постановке и достижению в учебном процессе разных дидактических целей. Задачи, искомые факты и способы деятельности в которых намеренно скрыты, являются средством развития творческих способностей. В зависимости от дидактических целей задача выполняет в учебном процессе различные функции. Предметная учебная задача естественнонаучного содержания позволяет действительно реконструировать и переводить известные формы уже имеющегося опыта учащегося в процессе познавательной активности и даже управлять некоторыми элементами учебного процесса.

Как отмечал Л. М. Фридман, задача – это знаковая модель проблемной ситуации. Решить математическую задачу – значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, теорем, аксиом, правил, тождеств, формул), применение которой к условиям задачи и их следствиям дает возможность получить ответ на поставленный вопрос. Таким образом, Л. М. Фридман проводит свои исследования в системе «задача + решение» [12].

Для выделения учебных задач Г. И. Саранцев вводит в методику обучения математике переосмысленную трактовку термина «упражнение». По его мнению, понятие задачи является более широким, обладающим характеристическими видовыми признаками: прямым продуктом решения задачи могут выступать изменения либо в заданной ситуации, либо в личности решающего. Упражнением является та задача, прямым продуктом которой является приобретение знаний, умений и навыков. Упражнения, пишет Г. И. Саранцев, представляют собой многоаспектное явление обучения математике, обладающее следующими характеристиками:

- носитель действий, адекватных содержанию обучения математике;
- средство целенаправленного формирования знаний, умений и навыков;
- способ организации и управления учебно-познавательной деятельностью учащегося;
- одна из форм реализации методов обучения;
- средство связи теории с практикой [10].

В отличие от упражнения задача, считает В. Г. Болтянский, имеет более творческую направленность, разница между ними условна и в значительной степени субъективна. Вопрос о том, «стандартный» или «творческий» характер носит определенное задание, зависит от склонностей, знаний, общей культуры учащегося, выполняющего его.

Оценить сложность учебной задачи, как отмечает И. Д. Пехлецкий, можно лишь тогда, когда известно, что она решается. При этом необходимо рассматривать все варианты решений, доступные данной категории учащихся, поэтому вся совокупность учебных задач, в рамках которых производится оценка сложности, должна быть описана или зафиксирована. Это, считает И. Д. Пехлецкий, дает возможность сравнивать решения задач между собой на основе моделирования каждого из них в виде многоуровневой конструкции [8].

Ведущим параметром сложности и трудности задачи является ее решаемость. Иногда при оценке задач задействуются другие параметры, в каком-то смысле родственные названным. Так, В. И. Загвязинский предлагает использовать степень проблемности задачи, определяя ее «отношением количества нестереотипных, нешаблонных шагов, необходимых для нахождения ответа, к общему количеству шагов» [3].

Основные функции учебной задачи – реконструировать и перевести известные формы имеющегося опыта в процесс познавательной активно-

сти учащихся и содержание их умственной деятельности, сделать средством интеллектуального и личностного решения. В дидактике среди ведущих функций задач в учебном процессе обычно выделяют образовательную, развивающую и воспитательную. Разное понимание сущности и функций учебных задач приводит к неоднозначным трактовкам задачного подхода к обучению. По мнению А. А. Вербицкого, в системе традиционного образования даются только наборы готовых стандартных заданий и задач, решаемых по заранее данному образцу. Такие задачи лишены смысла, так как не развивают мышления учащихся.

Рассмотрим данную А. А. Вербицким сравнительную характеристику задачного и проблемного подходов к решению задач, дополнив ее сопоставлением с модельным подходом (таблица).

Сравнительная характеристика задачного, проблемного и модельного подходов

Этап	Подход		
	задачный	проблемный	модельный
1-й	Анализ условий готовой задачи	Анализ проблемной ситуации	Разработка физической модели
2-й	Вспоминание способа решения	Постановка проблемы	Конструирование математической модели
3-й	Решение задачи	Поиск недостающей информации и выдвижение гипотез	Проверка правильности модели
4-й	Формальная сверка решения с эталонным ответом	Проверка гипотез и получение нового знания	Решения модельной задачи
5-й		Перевод проблемы в задачу	Проверка правильности решения задачи
6-й		Поиск способа решения	
7-й		Решение задачи	
8-й		Проверка правильности решения задачи	
9-й		Доказательство правильности решения	

В процессе творческой учебной деятельности проблемы возникают и в результате действий самих обучающихся. Задачному подходу А. А. Вербицкий противопоставляет проблемный подход, в котором в качестве единицы проектирования и развертывания содержания образования выступает проблема. В то же время А. А. Вербицкий заключает: «Путь

познавательной активности человека при проблемном подходе намного более длителен, интересен и продуктивен с точки зрения развития его мышления и личности. Учащийся находится в исследовательской позиции на всех этапах работы, кроме одного – этапа практического решения или постановки самой сформулированной задачи» [2].

Совсем иначе понимает задачу, а вслед за этим и задачный подход к обучению, В. И. Загвязинский. По его мнению, диагностическую структуру развивающего обучения можно представить, исходя именно из «задачного» понимания и «задачного» структурирования педагогической и учебной деятельности. Предпосылками такого подхода служат прочно утвердившиеся в отечественной психологии положения о единстве содержания и деятельности, о проблемном (задачном) характере мышления, возникающего только при наличии рассогласования между достигнутым и необходимым уровнями умений и навыков. Соответственно, полезно строить изучение темы или раздела как логическую последовательность познавательных задач, а сам учебный процесс – как цепь учебных ситуаций, ядром которых являются учебно-познавательные задачи, а содержанием – совместная работа педагогов и обучаемых над решением задачи с привлечением разнообразных средств познания и способов обучения [4].

В. И. Загвязинский выделяет следующие критерии познавательной задачи:

- противоречива по своей природе;
- синтезирует достигнутое и нацеливает на овладение еще неизвестным, на формирование новых подходов и приемов;
- отличается определенной познавательной трудностью.

Отмечая разнообразие видов проблемного обучения и задачного подхода, которые обусловлены, прежде всего, используемыми методами обучения, В. И. Загвязинский указывает, что проблемное обучение не универсально и очерчивает границы, внутри которых оно может быть эффективным. В дальнейшем он обосновывает технологию проблемно-задачного обучения, следование которой позволяет надеяться на получение гарантированных результатов. Ученый считает, что в предлагаемой технологии должны найти свое место все выделяемые им виды задач (репродуктивные, алгоритмические, трансформирующие и творческо-поисковые) [4].

Таким образом, в контексте задачного подхода учебная деятельность проектируется и реализуется через решения программно-подбран-

ных задач. При обучении, в котором все задачи представлены в виде готовых знаковых моделей, этот вид познавательной деятельности утрачивается. Поэтому важно давать учащемуся возможность сыграть роль исследователя, естествоиспытателя, предлагая ему самостоятельно находить и формулировать задачи, анализировать и сравнивать различные решения, обобщать полученные результаты естественнонаучного содержания.

В ходе решения предлагаемых задач учащиеся повторяют пройденные темы уроков. Повторение – это не механическое, происходящее время от времени воспроизведение ранее изученного материала, а постоянное вкрапление в ткань системы обучения таких упражнений, которые расширяют окрестности уже рассмотренных ключевых задач, добавляют в них новые связи и комбинации элементов [4]. После того как учащиеся овладевают приемами решения задач, с очевидностью сводящихся к ключевым, перед ними открывается множество задач, для получения ответов которых недостаточно знания стандартного алгоритма и умения применить его в знакомой ситуации. Важно отметить технологию составления учащимися модифицированных задач – эта деятельность способствует более осознанному усвоению получаемых знаний и умений и обычно выполняется с удовольствием. основополагающим элементом методики является работа с ключевыми задачами, которая предусматривает постепенный переход от совместных форм деятельности к индивидуальным.

Как показывают экспериментальные исследования, на начальных этапах изучения курса следует отдавать предпочтение фронтальному разбору отдельных ключевых задач темы, а на занимательных этапах полезно предлагать групповые и индивидуальные проекты по самостоятельному отбору вспомогательных задач темы и составлению их структурных схем. Эта деятельность направлена на формирование системности знаний учащихся, умения моделировать задачи. Одним из ее аспектов является постоянное повторение изучаемого материала на основе его визуализации в виде различных таблиц, схем, графиков, которые вывешиваются для общего обозрения в классе и фиксируются учащимися в своих конспектах. Проверка знаний происходит с помощью компьютерных контролирующих материалов.

Опишем основные моменты работы по структурированию и визуализации учебного материала, проводившейся автором статьи совместно с учащимися подготовительных курсов.

Перед началом освоения каждой темы ученикам выдается перечень ранее изученных материалов для самостоятельного повторения. Обяза-

тельна также предварительная подготовка учителя – он тщательно анализирует математическое содержание темы, изложенное в учебниках (действующих, экспериментальных, пробных), методической литературе, выявляет ее возможности для обучения, воспитания и развития, устанавливает взаимосвязь нового материала с предыдущим и последующим, продумывает связи с предметами естественнонаучного содержания. Учитель стимулирует все уровни активности учащихся, заботясь о постоянном повышении их творческой активности по мере увеличения трудности входной информации.

Формами освоения нового материала являются лекция или практическая работа с использованием проблемного, модельного методов обучения, а также метода целесообразно подобранных задач. Последний вызывает у учащихся наибольший интерес и применяется в тех случаях, когда необходимо показать, что получение новых знаний может быть следствием ранее изученного, подвести к выявлению новой математической закономерности, которую необходимо обосновать. В ходе занятий учитель уделяет большое внимание самостоятельной работе учащихся, обсуждению вариантов решений и повторению пройденного материала.

Анализируя задачный материал по математике, мы обнаружили, что в вариантах ЕГЭ встречаются задачи с проблемным содержанием, например: «В треугольнике ABC угол A равен α , а сторона BC равна a , H – точка пересечения высот. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BHC».

Решение проблемы заключается в дополнительном построении задачи, где используется свойство противоположных углов четырехугольника. Таким образом, для эффективной подготовки к государственной аттестации, не говоря уже о качественной подготовке к успешному продолжению обучения в вузе, требуется включение в структуру занятий нестандартных (проблемных) задач. Особенно полезны в этом плане олимпиадные задачи.

Приведем примеры таких олимпиадных задач.

Олимпиадная задача № 1.

Вычислить $f(\sqrt[3]{2} - 1)$,

где $f(x) = x^{1999} + 3x^{1998} + 4x^{1997} + 2x^{1996} + 4x^{1995} + 2x^{1994} + \dots + 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

Задача решается преобразованием выражения $x = \sqrt[3]{2} - 1$, $(x + 1)^3 = 2 \rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Олимпиадная задача № 2.

Доказать, что объем V и боковая поверхность S любого прямого кругового конуса удовлетворяет неравенству $\frac{6V}{\pi} \leq \frac{6S}{\pi\sqrt{3}}$. В каком случае возможно равенство?

Решение:

Обозначим через X и Y соответственно радиус основания и образующую конуса. Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{y^2 + x^2} \quad \text{и} \quad S = \pi xy.$$

Подставляя значения V и S в исходное неравенство, получим:

$$4(x^4 y^2 - x^6) \leq \frac{8}{(\sqrt{3})^3} x^3 y^3,$$

или, деля обе части неравенства на положительное число $4x^3 y^3$, получим:

$$\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3 \leq \frac{2}{(\sqrt{3})^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \frac{x}{y} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \geq 0. \quad (1)$$

Так как $x/y < 1$, то можем обозначить $x/y = \cos \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$ – угол между образующей и радиусом основания конуса, и получим неравенство (1) в виде:

$$\cos^3 \alpha - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} - \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0 \quad \text{или} \quad \left(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{2}{3}\right) \geq 0.$$

$$\text{Имеем} \quad \cos^2 \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{2}{3} = \left(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos \alpha + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Получим

$$\left(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\cos \alpha + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geq 0. \quad (2)$$

В неравенстве (2) первый множитель всегда неотрицательный, а второй при $0 < \alpha < \pi/2$ – всегда положительный. Производя все действия в обратном порядке, получим исходное неравенство.

Равенство в (2) достигается при $\cos \alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача естественнонаучного содержания.

Зависимость между количеством x вещества, полученного в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A(1 + \exp(-kt))$, где A – начальное количество вещества. Необходимо определить скорость химической реакции в момент времени t . Составленная математическая модель предусматривает решение дифференциального уравнения, приводящего к ответу задачи: $y = -Ak \exp(-kt)$.

Апробация методики задачного, проблемного и модельного подходов показывает, что организация постоянного мониторинга и коррекционной деятельности позволяет с высокой степенью точности прогнозировать результаты класса (группы) и отдельных учащихся на ЕГЭ по математике.

Литература

1. Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Кн. 1. Дискретные объекты. М.: ФИМА: МЦНМО, 2002. 368 с.
2. Вербицкий А. А. Психолого-педагогические основы образования взрослых: контекстный подход // Новое знание. 2001. № 2. С. 15.
3. Загвязинский В. И. Измерение уровня проблемности в обучении // Объективные характеристики, критерии, оценки и измерения педагогических явлений и процессов / под ред. А. М. Арсентова, М. А. Данилова. М., 1973. 296 с.
4. Загвязинский В. И. Теория обучения. Современная интерпретация: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. 2-е изд., испр. М.: Издат. центр «Академия», 2004. 192 с.
5. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. М.: ИНТОР, 1996. 544 с.
6. Колмогоров А. Н. // О профессии математика. М.: Наука, 1988. 286 с.
7. Морозова Е. А. // О профессии математика. М.: Наука, 1988. 286 с.
8. Пехлецкий И. Д. Сложность и трудность учебных текстов и задач: кн. для учителей и студентов. Пермь: ПГПУ, 2008. 101 с.
9. Розов Н. Х. Дифференцированное обучение и проблемы формирования «базиса» в пространстве задач // Математическое образование:

традиции и современность: тез. докл. федеральной науч.-практ. конф. Н. Новгород: Изд-во НГПУ, 1977.

10. Саранцев Г. И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд. М.: Просвещение, 2005. 255 с.

11. Теоретические основы содержания общего среднего образования / под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. М.: Педагогика, 1983. 352 с.

12. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике. М.: МПСИ, Флинта, 1998. 216 с.