18. Konanchuk D. S. EdTech: a new technology platform in education. *Universitetskoe obrazovanie: praktika i analiz.* [*University Education: Practice and Analysis*]. Ekaterinburg. 2013. № 5 (87). P. 65–73. (In Russian)

Received: 18.07.2016; accepted for printing: 14.12.2016.
The authors have read and approved the final manuscript.

About the authors:

Evgeny M. Dorozhkin – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Rector of the Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg (Russia). E-mail: evgeniy.dorozhkin@rsvpu.ru.

Ewald F. Zeer – Doctor of Psychological Sciences, Professor, Head of Department of Educational Psychology and Professional Development, Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg (Russia). E-mail: kafedrappr@mail.ru.

Valery Ya. Shevchenko – Ph.D. in Pedagogy, Associate Professor, Vice-Rector for Education, Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg (Russia). E-mail: valerij.shevchenko@rsvpu.ru.

Contribution of the authors:

Evgeny M. Dorozhkin – scientifically proved innovative vocational qualification structure of continuous education of teachers.

Valery Ya. Shevchenko – considered the possibility of implementing a multichannel training of teachers of vocational schools on the basis of the network, process and project approaches.

Ewald F. Zeer – identified panorama of the research and the project of psychological and pedagogical content of the teachers teaching platform.

УДК 51(072.8) DOI 10.17853/1994-5639-2017-1-81-102

КУРС ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ФОРМАТЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

В. И. Игошин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет, Саратов (Россия).
E-mail: igoshinvi@mail.ru

Аннотация. *Цель* статьи – проанализировать формат двухуровневой подготовки – бакалавриата и магистратуры – будущих учителей математики с точки зрения содержания материала, который должен быть освоен студентами, и формируемых у них профессиональных компетенций.

Методология и методики исследования. В исследовании использовались теоретические методы: анализ педагогической и методической литературы, нормативных документов; исторический, сравнительно-сопоставительный и логический виды анализа содержания педагогического математического образования; прогнозирование, проектирование и моделирование методической системы двухуровневой подготовки будущих учителей математики.

Результаты и научная новизна. Уровневая дифференциация системы высшего образования требует составления соответствующих учебных планов для бакалавриата и магистратуры. Основополагающим принципом при этом должен служить принцип преемственности: магистратура должна углублять знания, умения и навыки, развивать компетенции, приобретенные в бакалавриате. С этих позиций в работе рассматривается курс «Числовые системы» – важнейший в методологическом плане курс для будущих учителей математики. Показывается, каким содержанием он должен быть наполнен на уровне бакалавриата и на уровне магистратуры. В бакалавриате предлагается изучить классические системы чисел – натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных. В магистратуре должно осуществляться дальнейшее расширение знаний студентов о системах чисел, которые осваиваются здесь как теория алгебраических систем, возникшая на стыке алгебры и математической логики. Предметом изучения становятся алгебры над полем, алгебры с делением над полем, альтернативные алгебры с делением над полем, йордановы алгебры, алгебры Ли. Постижение основ теории алгебр магистром профиля «математическое образование» будет способствовать более осознанному пониманию им существа аксиоматического метода, строения аксиоматических теорий в математике, механизмов развития математической науки, а вместе с тем поможет сложиться целостному видению математики как единой науки. В результате образовательный уровень магистра будет выше образовательного уровня бакалавра педагогического математического образования.

Практическая значимость. Материалы статьи могут быть полезны руководителям кафедр и магистерских программ, преподавателям классических и педагогических университетов, осуществляющим подготовку бакалавров и магистров по направлению «Педагогическое образование (математика)».

Ключевые слова: системы чисел – натуральных, целых, рациональных, вещественных, комплексных; двойные и дуальные числа; тело кватернионов; алгебры с делением над полем; теорема Фробениуса; альтернативные алгебры с делением; алгебра октав; системы гиперкомплексных чисел; йордановы алгебры, алгебры Ли; аксиоматические теории числовых систем.

Для цитирования: Игошин В. И. Курс числовых систем в формате двухуровневой подготовки учителей математики // Образование и наука. 2017. Т. 19, № 1. С. 81–102. DOI: 10.17853/1994-5639-2017-1-81-102.

SUBJECT «NUMBER SYSTEMS» IN TWO-LEVELED FORMAT PREPARATION TEACHERS OF MATHEMATICS

Vladimir I. Igoshin

Saratov National Research State University, Saratov (Russia).
E-mail: vigon1948@gmail.com

Abstract. *The aim* of this article is to analyze the format of a two-leveled training – bachelor and master – future teachers of mathematics from the point of view of the content of mathematical material, which is to develop prospective teachers of mathematics at those two levels, shaping their professional competence.

Methods. The study involves the theoretical methods: the analysis of pedagogical and methodical literature, normative documents; historical, comparative and logical analysis of the content of pedagogical mathematical education; forecasting, planning and designing of two-leveled methodical system of training of future teachers of mathematics.

Results and scientific novelty. The level differentiation of the higher education system requires developing the appropriate curricula for undergraduate and graduate programs. The fundamental principle must be the principle of continuity – the magister must continue to deepen and broaden knowledge and skills, along with competences acquired, developed and formed on the undergraduate level. From these positions, this paper examines the course «Number Systems» – the most important in terms of methodology course for future mathematics teachers, and shows what content should be filled with this course at the undergraduate level and the graduate level. At the undergraduate level it is proposed to study classical number systems – natural, integer, rational, real and complex. Further extensions of the number systems are studied at the graduate level. The theory of numeric systems is presented as a theory of algebraic systems, arising at the intersection of algebra and mathematical logic. Here we study algebras over a field, division algebra over a field, an alternative algebra with division over the field, Jordan algebra, Lie algebra. Comprehension of bases of the theory of algebras by the master of the «mathematical education» profile will promote more conscious understanding of an axiomatic method, a structure of axiomatic theories in mathematics, development mechanisms of mathematical science; at the same time it will help to develop to complete vision of mathematics as a single science. As a result, the educational level of the master will be above the educational level of the bachelor of pedagogical mathematical education.

Practical significance. The article can be useful to heads of departments and graduate programs, faculties of classical and pedagogical universities, carrying out preparation of masters in the direction «Pedagogical Education (Mathematics)».

Keywords: number systems – natural, integer, rational, real, complex, double and dual numbers; the body of quaternions; algebras with a division over a field; Frobenius theorem; alternative algebra with division; algebra of octaves; systems of hypercomplex numbers; Jordan algebra, Lee algebra; axiomatic theory of number systems.

For citation: Igoshin V. I. Subject «Number systems» in two-leveled format preparation teachers of mathematics. *The Education and Science Journal.* 2017. Vol. 19. № 1. P. 81–102. DOI: 10.17853/1994-5639-2017-1-81-102.

Введение

Формат двухуровневой вузовской подготовки – бакалавриата и магистратуры – вкупе с парадигмой компетентностного обучения будущих специалистов в самых разнообразных сферах еще только пытается отыскать положение равновесия в сумбурном потоке реформ, продолжающем обрушиваться на образовательное пространство России. Ситуация с компетентностным подходом в области современного математического образования будущих инженеров прекрасно обрисована во вводной части статьи Е. П. Богомоловой [1]. Не лучшим образом выглядит компетентностный подход в области подготовки будущих учителей математики, в особенности в тех классических университетах, куда в последние годы были влиты региональные педагогические институты.

Проблема данного подхода в указанной области заслуживает отдельного рассмотрения. Определенной ее частью является организация двухуровневого обучения будущих учителей математики. Некоторые соображения по этому поводу высказывались нами ранее [2–4]. В частности, на уровне бакалавриата целесообразно вести образовательную и профессиональную подготовку наиболее массовой категории учителей математики для обеспечения основного общего школьного образования. Выпускник получает образовательную квалификацию «бакалавр педагогического образования (по математике)» и профессиональную квалификацию «учитель математики 5–9-х классов». Второй уровень (магистратура) позволит готовить преподавателей (учителей) математики для полного среднего образования (10–11-х классов лицеев, гимназий, специализированных школ и классов с углубленным изучением предмета). Выпускнику присваивается образовательная квалификация «магистр педагогического образования (по математике)». Обучение магистров может осуществляться и по индивидуальному заказу вузов с целью подготовки для них преподавателей и научных работников в области методики преподавания математики (квалификация «магистр математики»).

Такая уровневая дифференциация системы образования требует составления соответствующих учебных планов для бакалавриата и магистратуры. Основополагающим принципом при этом должна быть преемственность: в магистратуре следует углублять и расширять знания, умения и навыки, а вместе с ними и компетенции, сформированные на уровне бакалавриата.

В структуре предметной подготовки бакалавров педагогического образования (профиль – математическое образование) выделяются шесть основных направлений (линий): «Элементарная математика», «Алгебра и дискретная математика», «Геометрия», «Математический анализ», «Вероятность и статистика» и «Математика в историческом развитии». В предыдущих наших публикациях охарактеризовано содержание каждого из этих направлений, описаны цели, которые перед ними ставятся, и взаимосвязи между ними в процессе подготовки бакалавров педагогического образования указанного профиля [6]. Кроме того, разработана модель фундаментальной математической подготовки будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики (математическая логика, теория алгоритмов, дискретная математика), в которой показано, как можно органично представить содержание данных дисциплин при двухуровневой системе обучения – в условиях бакалавриата и магистратуры. В настоящей работе с аналогичной точки зрения рассматривается курс числовых систем при подготовке будущих учителей математики [2].

Понятие числа – фундаментальнейшее понятие математической науки. Исторически оно складывалось постепенно, в процессе решения все более сложных вопросов сначала практического, а затем и теоретического характера. Мощный толчок к теоретическому осмыслению понятия числа дало в XIX веке развитие математического анализа, заставившее заняться исследованием его основ, а это потребовало изучения системы вещественных чисел. Дальнейшее углубление знаний в данной области произошло в XX в. вместе с развитием современной алгебры и математической логики.

Значение курса числовых систем для будущего учителя математики

Курс числовых систем занимает особое место в системе подготовки будущих учителей математики. Для них он имеет двойное методологическое значение. Во-первых, без всякого преувеличения, следуя за Пифагором, мы и сейчас с особым выражением можем повторить: «Все есть число!» Действительно, числа лежат в основе математики, физики, других естественных наук, проникают в гуманитарную сферу. Компьютерные технологии, до неузнаваемости преобразующие современный мир, – это тоже цифровые технологии. Поэтому учитель математики, с 1-го по 11-й класс имеющий дело с числами и обучающий числам своих учеников, должен представлять, на каком теоретическом фундаменте данные знания базируются. Именно знания о мире чисел будут в немалой степени способствовать формированию у будущих педагогов целостного представления о математике как науке.

Во-вторых, современное представление о теории числовых систем позволяет весьма обстоятельно познакомиться с фундаментальным методом современной математики – аксиоматическим методом, тесно связанным с математической логикой, что также добавляет знаний о математике как единой науке.

Наконец, на примере данного курса будущий учитель наглядно увидит, как возникает и развивается математическая наука – от решения конкретных практических задач к математическим теориям высокого уровня логической абстракции.

В процессе обучения математике происходит тесное дидактическое взаимодействие математики и логики, математического содержания (контента) и логического духа (ауры). Какие бы вопросы учитель ни объяснял своим ученикам, он обязан постоянно следить за тем, чтобы этот логический дух не улетучился из учебного процесса. Педагог должен учить:

1) логическому строению математических предложений (определений и теорем);

2) логическому понятию доказательства математической теоремы;

3) логическим методам доказательства математических теорем;

4) логическому строению математических теорий.

Это своего рода принципы логики при обучении математике. Они указывают основные направления проникновения логики в педагогику математики, служат дополнением к общедидактическим принципам применительно к преподаванию этой дисциплины, уточняют структуру той части педагогической науки, которая связана с обучением математике [6].

Чтобы дидактическое взаимодействие логики и математики было эффективным, необходима целенаправленная подготовка будущих учителей в педагогическом вузе. Она должна состоять из двух этапов – логической подготовки и логико-дидактической подготовки. Ядром первой является профессионально-педагогически ориентированный курс математической логики, благодаря которому студенты приобретают необходимые для будущей педагогической работы знания и умения в области логики. Пособиями при такой подготовке могут служить выпущенные нами книги «Математическая логика и теория алгоритмов» и «Математическая логика» [7, 8].

Логическая подготовка будущих учителей математики должна органично перерастать в логико-дидактическую. Это означает, что основополагающие идеи и методы математической логики, обобщенные в вышеуказанных принципах, должны пронизывать все математические курсы педвуза: геометрию, алгебру и теорию чисел, математический анализ, числовые систеы, дискретную математику, теорию вероятностей, теорию алгоритмов, а также курсы психолого-педагогических основ обучения математике, методику преподавания математики, историю и методологию математики, в которых внимание студентов следует акцентировать на вопросах, имеющих принципиальное логическое значение. В методических курсах педвуза демонстрируется, как именно знания логики используются в процессе преподавания конкретных разделов и тем школьного курса математики. Пособием по логико-дидактической подготовке будущих учителей математики могут служить книги «Математическая логика как педагогика математики» и «Математическая логика в обучении математике. Логико-дидактическая подготовка учителя математики» [9, 10].

Таким образом, логическая и логико-дидактическая виды подготовки должны стать системообразующими факторами в системе всей подготовки будущих учителей математики.

Курс «Числовые системы», читаемый будущим учителям математики в педагогическом вузе, также служит их логико-дидактической подготовке. Теория числовых систем являет собой уникальный образец математической теории, на котором методы математической логики и аксиоматического построения математической теории могут быть представлены студентам наглядно и с полными доказательствами. Подобными методическими возможностями не обладает даже курс геометрии. Более того, курс «Числовые системы» может быть легко адаптирован для системы двухуровневой подготовки будущих учителей математики – в бакалавриате и в магистратуре.

Курс «Числовые системы» для бакалавров педагогического образования

Получая педагогическое образование на уровне бакалавриата, будущий учитель математики должен ознакомиться с теорией построения следующих классических числовых систем: натуральных чисел N, целых чисел Z, рациональных чисел Q, действительных чисел R и комплексных чисел C. Методическим вопросам преподавания данного курса в таком объеме посвящена наша статья в журнале «Математика в высшем образовании» [11]. Отметим ее основные идеи.

Построение *теории натуральных чисел* начинается с четких первоначальных понятий и формулировки аксиом Пеано. Доказательства теорем о натуральных числах имеют строгую логическую структуру, основываются на аксиоме индукции и непременно опираются на сформулированные аксиомы. После того как аксиоматическая теория натуральных чисел достаточно освоена, приступают к изучению свойств этой теории, т. е. к ее метатеории. Вопрос о непротиворечивости аксиоматической теории натуральных чисел решается на относительном уровне: строится модель этой теории в рамках другой аксиоматической теории – теории множеств, базирующейся на системе аксиом Цермело-Френкеля (о ней см. [7], § 30), и тем самым доказывается, что аксиоматическая теория натуральных чисел непротиворечива при условии непротиворечивости аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля. Обосновывается категоричность аксиоматической теории натуральных чисел, построенной на базе системы аксиом Пеано: любые две модели этой теории изоморфны. Наконец, доказывается независимость системы аксиом Пеано, т. е. невозможность доказательства ни одной из них, исходя из трех оставшихся. Доказательство осуществляется с помощью построения соответствующих моделей.

Наряду с аксиоматикой Пеано существуют и другие аксиоматические подходы к теории натуральных чисел. Каждая из аксиоматик освещает понятие натурального числа со своей стороны, но все они эквивалентны друг другу, поскольку, как и аксиоматика Пеано, категоричны и фактически описывают один и тот же объект. Примером может служить аксиоматика, основанная на операциях сложения и умножения. Система натуральных чисел $< N; ', 1 >$ рассматривается как алгебраическая система $< N; +, \cdot >$ и определяется как минимальное полукольцо (ассоциативность и коммутативность сложения, сократимость по сложению: $x + u = y + u \Rightarrow x = y$, ассоциативность умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения) с нейтральным элементом по умножению $(\exists 1)(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)$ и без нейтрального элемента по сложению $(\forall x, y)(x \neq x + y)$. Отметим, что в силу последнего свойства полукольцо $< N; +, \cdot >$ натуральных чисел не является кольцом.

Еще один пример: за основу берутся свойства системы натуральных чисел как упорядоченного множества. Система натуральных чисел $< N; \leq >$ характеризуется как бесконечное (линейное) вполне упорядоченное множество, всякое подмножество которого, имеющее максимальный элемент, конечно. (Упорядоченное множество – это множество вместе с заданным на нем отношением порядка $\leq$. Линейность отношения порядка $\leq$ означает, что $(\forall x, y)(x \leq y \vee y \leq x)$.) Линейно упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если оно удовлетворяет условию минимальности: всякое непустое подмножество этого множества имеет хотя бы один минимальный элемент, т. е. элемент, меньше которого элементов нет.

Все последующие числовые системы, рассматриваемые в порядке увеличения множеств содержащихся в них элементов (чисел), строятся по одному и тому же плану. При этом в каждой более объемной числовой системе мы приобретаем возможность выполнять такие действия с числами, которые не могли осуществлять в предыдущей числовой системе. Каждая числовая система вводится определением, где перечисляются требования, которым она должна удовлетворять. Это определение позволяет доказать лемму о строении соответствующей числовой системы. В ней показывается, что каждое число новой системы можно задать некоторой определенным образом организованной совокупностью чисел системы предыдущего уровня. Обычно такой совокупностью оказывается упорядоченная пара чисел из системы предыдущего уровня. С помощью этой леммы осуществляется конструктивное построение вводимой числовой системы из «материала» числовой системы, построение которой проделано на предыдущем шаге расширений. Строится вся новая числовая система вместе с включенной в нее системой предыдущего уровня. Таким образом доказывается существование соответствующей числовой системы. Наконец также с использованием леммы о строении рассматриваемой числовой системы и изоморфизма любых двух числовых систем предыдущего уровня (категоричности аксиоматической теории предыдущего уровня) доказывается изоморфизм любых двух числовых систем данного уровня (категоричность аксиоматической теории данного уровня).

Система натуральных чисел $< N; +, \cdot >$ является полукольцом, но не кольцом. Поэтому *система целых чисел* $< Z; +, \cdot >$ определяется как наименьшее кольцо, содержащее систему натуральных чисел. Операция вычитания в системе натуральных чисел частична (определена не для любых двух натуральных чисел). В кольце целых чисел эта операция становится всюду определенной. В качестве модели теории целых чисел строится система пар натуральных чисел (К. Вейерштрасс, 1894).

Систему целых чисел можно охарактеризовать с помощью следующих условий. Кольцо целых чисел – это кольцо с единицей (единичным элементом) e, не содержащее отличного от него подкольца с единицей и обладающее тем свойством, что $n \cdot e \neq 0$ для любого натурального числа n. В самом деле, нетрудно показать, что множество всех элементов вида $n \cdot e$ изоморфно системе $< N; +, \cdot >$ натуральных чисел. Следовательно, данное кольцо содержит подкольцо Z_0, изоморфное кольцу Z целых чисел, поскольку кольцо Z – минимальное из таких колец. Но так как Z_0 содержит единицу e, то, по условию, Z_0 должно совпасть с данным кольцом, которое будет кольцом целых чисел.

Кольцо Z целых чисел не является полем, и операция деления в нем частична, т. е. применима не к любым двум его ненулевым элементам: не для любых целых a и $b \neq 0$ найдется такое целое x, что $a \cdot x = b$. В связи с этим возникает проблема расширения этого кольца до поля, желательно наименьшего. Так приходят к *системе (полю)* $< Q; +, \cdot >$ *рациональных чисел*. В качестве модели теории рациональных чисел строится система пар целых чисел (Ж. Таннери, 1894).

Поле Q рациональных чисел обладает рядом важных свойств:

1) оно линейно упорядочено;

2) оно плотно: $(\forall\ x, y)(x < y \rightarrow (\exists\ t)(x < t < y))$;

3) оно архимедовски упорядочено: $(\forall\ x)(\forall\ y > 0)(\exists\ n \in N)(n \cdot y > x)$.

Кроме того, систему рациональных чисел можно охарактеризовать как наименьшее поле характеристики 0. (Говорят, что поле имеет характеристику 0, если $n \cdot a \neq 0$ для любого его элемента a и любого целого числа $n \neq 0$.)

Система R действительных (вещественных) чисел строится как расширение поля Q рациональных чисел с целью наделения новой системы еще одним важным свойством, каким не обладает поле Q. Дело в том, что в поле Q (как и во всяком упорядоченном поле) любая сходящаяся последовательность фундаментальна (или является последовательностью Коши), но не каждая фундаментальная последовательность сходится, т. е. имеет предел. Поэтому система R действительных (вещественных) чисел определяется как архимедовски упорядоченное поле $< R; +, \cdot >$, содержащее поле $< Q; +, \cdot >$ рациональных чисел в качестве подполя, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится (имеет предел). Последний факт чрезвычайно важен для оснований математики. Он делает поле действительных чисел надежным фундаментом для математического анализа и многих приложений непрерывной математики.

Существует ряд способов конструктивного построения поля действительных чисел из элементов поля рациональных чисел: с помощью фундаментальных последовательностей рациональных чисел (Ш. Мере, 1869; Г. Кантор, 1879); сечений в поле рациональных чисел (Р. Дедекинд, 1872); бесконечных десятичных дробей (К. Вейерштрасс, 1872).

Существуют и другие аксиоматические характеризации системы действительных чисел, т. е. такие системы аксиом, для которых система действительных чисел является единственной с точностью до изоморфизма моделью. Одна из них утверждает, что система действительных чисел и только она является плотным в себе, полным по Дедекинду, линейно упорядоченным множеством без наименьшего и наибольшего элементов, в котором существует счетное, всюду плотное подмножество. (Плотность означает, что между любыми двумя элементами множества расположен хотя бы еще один его элемент. Полнота, согласно Дедекинду, означает, что всякое непустое, ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань. Существование всюду плотного подмножества, называемое свойством сепарабельности (отделимости), означает, что для каждого элемента множества существует как угодно близкий к нему элемент этого подмножества.)

С этой характеристикой системы действительных чисел связана одна из знаменитых математических проблем XX века – проблема М. Я. Суслина. Требуется узнать, сохранится ли указанная характеристика системы действительных чисел, если в ней условие сепарабельности заменить более слабым требованием, называемым условием Суслина: любая система из попарно не пересекающихся непустых интервалов не более чем счетна.

М. Я. Суслин (1894–1919) прожил короткую жизнь [12], а его проблема стала достоянием научной общественности уже после его смерти, в 1920 г. На ее осмысление потребовалось более 40 лет. По значимости она встала в один ряд с континуум-проблемой Кантора, и решение обеих было получено лишь в начале 60-х гг. XX в., когда американский математик П. Коэн открыл принципиально новый метод доказательства, получивший название форсинг (вынуждение). (За это открытие в 1966 г. на Международном математическом конгрессе в Москве П. Коэн был удостоен Филдсовской премии – одной из престижных международных наград, которых удостаиваются ученые-математики.) Выяснилось, что проблему Суслина, как и континуум-проблему Кантора, вообще невозможно решить в обычном смысле слова, т. е. дать определенный ответ «да» или «нет» на поставленный вопрос. Гипотеза Суслина, как и континуум-гипотеза Кантора [13], оказалась не зависящей от остальных аксиом теории множеств. (Кроме того, была также установлена взаимная независимость этих гипотез.) Другими словами, возможна теория множеств, в которой гипотеза Суслина справедлива, и возможна теория множеств, где эта гипотеза не подтверждается. Ситуация оказалась сходной с доказательством пятого постулата Евклида, которая была разрешена в первой половине XIX века, в результате чего была не просто открыта новая, воображаемая геометрия, получившая название геометрии Лобачевского, а началась новая эпоха в развитии всей математической науки.

В поле R действительных чисел не всегда выполнима операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат: нельзя извлечь корень квадратный из отрицательного числа. Ясно, что если мы сумеем извлечь квадратный корень из числа –1, то сможем извлекать его из любого отрицательного числа. Поэтому следующая система чисел, расширяющая поле R действительных чисел, определяется как наименьшее поле $<C; +, \cdot>$, содержащее поле $< R; +, \cdot >$ в качестве подполя и элемент $i \notin R$ со свойством $i^2 = -1$, который называется *мнимой единицей*. (Последнее требование означает, что алгебраическое уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение в поле C.) Оно называется *полем комплексных чисел*. Это поле конструктивно строится из упорядоченных пар действительных чисел (У. Гамильтон, 1837), и доказывается его единственность с точностью до изоморфизма. Выделяется одно свойство этого поля, отличающее его от предыдущих числовых систем: его нельзя линейно упорядочить.

Построим в общем виде возрастающую последовательность числовых систем: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. При каждом таком переходе мы получаем возможность разрешения все более сложных алгебраических уравнений: $x + m = n$ (при переходе от N к Z), а $x = b$ (при переходе от Z к Q). При переходе от Q к R некоторые алгебраические уравнения, не разрешимые в предыдущих числовых системах, могут быть разрешены, например $x^2 = 2$. Тем не менее и в поле R не все алгебраические уравнения имеют хотя бы один корень. Только с введением в поле C комплексных чисел у каждого алгебраического уравнения степени $n \geq 1$ с коэффициентами из поля C будет, по крайней мере, один корень из поля C. В этом состоит алгебраическая замкнутость поля C, впервые доказанная К.-Ф. Гауссом (1777–1855). Более того, каждое такое алгебраическое уравнение степени $n \geq 1$ имеет ровно n комплексных корней, считаемых с их кратностями. Это утверждение носит название основной теоремы алгебры, и она показывает, что с введением поля комплексных чисел идея расширения числовых систем, связанная с практической задачей разрешимости алгебраических уравнений, фактически получает свое завершение.

На этом в бакалавриате можно завершить знакомство будущих учителей математики с системами чисел. Каждый студент должен отчетливо представлять дедуктивно-аксиоматические основы школьного курса математики – как алгебры и начал анализа, так и геометрии. Безусловно, прав был академик А. Н. Колмогоров, утверждавший, что «понимание не только практической целесообразности, но и логической обоснованности выбора определений при формальном построении соответствующих теорий представляется… совершенно необходимым элементом воспитания будущих учителей» [14, с. 265–266].

Более подробно методические вопросы изложения курса «Числовые системы» освещены в других наших работах [9–11].

Курс «Числовые системы» для магистров педагогического образования

Дополнительные два года образования в магистратуре дают возможность будущему учителю математики получить более высокую квалификацию и, в частности, глубже проникнуть в теорию числовых систем.

Возможно ли дальше расширять системы чисел и, если да, то как? Известно, что многие разделы математики возникали из потребности решения тех или иных практических задач. Однако, когда эти задачи решались, математические теории продолжали развиваться по своим внутренним законам математической науки, порой весьма далеко удаляясь от породившей их практики.

Так, описанные выше теории числовых систем возникли из потребностей решения алгебраических уравнений и строгого обоснования идеи непрерывности – главной идеи математического анализа. Когда эти цели были достигнуты, в конце XIX – начале XX века активизировалось внимание к аксиоматическому методу, начала бурно развиваться математическая логика, возникла современная алгебра как математическая наука, изучающая алгебраические системы. Системы чисел оказались частью этого более общего понятия, и уже теория алгебраических систем формулировала и диктовала очередные задачи и проблемы и указывала методы их решения.

Комплексные, двойные и дуальные числа. Вернемся к процедуре расширения поля R действительных чисел до поля C комплексных чисел. Наша практическая задача – решать алгебраические уравнения. Для этого требуется ввести новый элемент $i \notin R$, являющийся решением простейшего неразрешимого в R уравнения $x^2 + 1 = 0$. Тогда каждый элемент из нового поля C должен иметь следующее строение: $a + bi$, где $a, b \in R$.

Попробуем теперь добиться, чтобы совокупность всех объектов вида $a + bi$, где $a, b \in R$, была бы не полем, а хотя бы коммутативным кольцом, но содержащим поле R действительных чисел в качестве подполя, т. е. была бы расширением поля R. Эта задача не имеет никакой практической направленности, а носит чисто математический характер. Она решена. Оказывается, таких расширений существует ровно три. Первое из них – знакомое нам поле C комплексных чисел, при этом элемент $i \notin R$ таков, что $i^2 = -1$. Второе – кольцо D_1 так называемых *двойных чисел*, элемент $i \notin R$ таков, что $i^2 = 1$. Наконец, третье – кольцо D_0 так называемых *дуальных чисел*, элемент $i \notin R$ таков, что $i^2 = 0$. Из этих трех колец только C является полем. В коммутативных кольцах D_0 и D_1 невозможно деление, т. е. неразрешимы уравнения вида $a \cdot x = b$.

Поскольку система C комплексных чисел, как и система R действительных чисел, является полем, иначе говоря, комплексные числа обладают всеми основными свойствами действительных чисел, связанными с операциями сложения и умножения, теория комплексных чисел получила широкое математическое развитие. Для комплексных чисел определены и изучены практически все положения действительного анализа, и, как следствие, теория комплексных чисел нашла широкое применение во многих разделах математики и ее практических приложениях. Значительно менее богатой оказалась теория двойных и дуальных чисел. Тем не менее и для них определены многие понятия действительного анализа, и данная теория также находит свои применения [15].

Тело кватернионов. Если при расширении поля R мы не хотим отказываться от возможности деления, то придется отказаться от коммутативности умножения (ибо оба эти требования приведут нас к полю C комплексных чисел). Первую такую систему чисел нашел в 1843 г. ирландский математик У.-Р. Гамильтон. Она получила название *система кватернионов*. Ее можно определить и исследовать аналогично системе комплексных чисел. Она является телом, т. е. кольцом с единицей, в котором возможно деление (разрешимы оба уравнения $a \cdot x = b$ и $y \cdot a = b$ при $a \neq 0$, или всякий ненулевой элемент имеет обратный). Но коммутативность умножения места не имеет.

Системой кватернионов называется минимальное тело H, содержащее поле R действительных чисел в качестве подполя и элементы (мнимые единицы) $i, j, k \notin R$, перестановочные при умножении со всеми действительными числами и удовлетворяющие условиям: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $k \cdot i = -i \cdot k$ $0 = j$. Доказывается лемма о строении следующего тела: каждый его элемент можно представить в виде: $x = a + bi + cj + dk$; причем такое представление единственное. Вопрос о существовании тела кватернионов решается его конструктивным построением на основе поля действительных чисел: элементами тела H объявляются всевозможные упорядоченные четверки (a, b, c, d) действительных чисел $a, b, c, d \in R$, т. е. $H = R^4 = \{(a, b, c, d): a, b, c, d \in R\}$. В этом множестве вводятся две бинарные алгебраические операции + и ·:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2);$$
$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 -$$
$$- d_1c_2, a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2, a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2).$$

Простыми преобразованиями проверяется выполнимость аксиом кольца. Четверка (1, 0, 0, 0) играет роль единичного элемента, (0, 0, 0, 0) – нулевого. Обратным элементом для ненулевой четверки (a, b, c, d) будет четверка $(a/N, - b/N, - c/N, - d/N)$, где $N = a^2 + b^2 + c^2+ d^2$.

Из легко проверяемых равенств:

$$(a, 0, 0, 0) + (b, 0, 0, 0) = (a + b, 0, 0, 0),$$
$$(a, 0, 0, 0) \cdot (b, 0, 0, 0) = (a \cdot b, 0, 0, 0)$$

следует, что множество R_0 всех четверок вида $(a, 0, 0, 0)$, для любых $a \in R$, образует в кольце R^4 подполе, изоморфное полю R действительных чисел. Четверки (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) играют роль мнимых единиц i, j, k соответственно.

Таким образом, алгебра $< R^4; +, \cdot >$ является телом кватернионов, единственным с точностью до изоморфизма. При этом множество всех четверок вида $(a, b, 0, 0)$ для любых $a, b \in R$ образует в теле R^4 подполе, изоморфное полю комплексных чисел. То же можно сказать относительно множества всех четверок вида $(a, 0, b, 0)$ и множества всех четверок вида $(a, 0, 0, b)$ для любых $a, b \in R$. Это значит, что система кватернионов является одним из расширений системы комплексных чисел.

Общий подход к характеризации систем комплексных, двойных и дуальных чисел. Этот подход осуществляется в рамках нового общего понятия – понятия алгебры и алгебры с делением над полем, которые поднимают науку о числовых системах от конкретных систем чисел в область современной абстрактной алгебры – науки об общих алгебраических системах.

Алгебра над полем P ранга n есть алгебраическая система $< A; +, \cdot, * >$, в которой $< A; +, \cdot >$ есть n-мерное векторное пространство над полем P, а $< A; +, * >$ есть кольцо, причем операция · – умножения элементов из A на элементы из P (внешняя операция умножения) – и операция $*$ – умножения элементов в A (внутренняя операция умножения) – связаны следующим требованием:

$$(\forall\ x, y \in A)(\forall\ \alpha \in P)[(\alpha \cdot x) * y = x * (\alpha \cdot y) = \alpha \cdot (x * y)].$$

Единичный элемент e кольца $< A; +, \ast >$ называется *единицей* алгебры. Нулевой элемент O векторного пространства $< A; +, \cdot >$ называется *нулем* алгебры.

Таким образом, алгебра над полем – это векторное пространство над полем (его называют носителем алгебры), в котором определена дополнительно операция $\ast$ умножения, дистрибутивная относительно сложения + в векторном пространстве и перестановочная с умножением на скаляр.

Нетрудно понять, что система R действительных чисел есть алгебра над полем R ранга 1; системы C комплексных, D_1 двойных и D_0 дуальных чисел являются алгебрами над полем R ранга 2. Наконец, алгебра H кватернионов над полем R имеет ранг 4.

Верно и обратное утверждение, характеризующее системы C, D_1 и D_0: алгебра с единицей, отличной от нуля, над полем R действительных чисел ранга 2 есть либо алгебра C комплексных чисел, либо алгебра D_1 двойных чисел, либо алгебра D_0 дуальных чисел.

Общий подход к характеризации систем действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов. Мы уже отмечали, что система кватернионов построена с возможностью деления в ней ее элементов, что приводит к общему понятию *алгебры с делением над полем P*. Это такая алгебра $< A; +, \cdot, \ast >$ над полем P, в которой кольцо $< A; +, \ast >$ является телом.

Описание всех алгебр с делением конечного ранга над полем R действительных чисел дает теорема Ф. Фробениуса (1877): всякая такая алгебра есть либо поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел, либо тело кватернионов.

О дальнейших обобщениях числовых систем. Можно и дальше обобщать системы чисел, но эти обобщения будут по нисходящей в меньшей степени обладать свойствами, присущими обычным числам, и тем самым будут все дальше удаляться от тех практических задач, решение которых привело к возникновению теории числовых систем. Математическая теория развивается с большей скоростью по своим внутренним законам, все больше удаляясь от практики.

Следующий шаг в обобщении числовых систем связан с отказом от свойства ассоциативности операции умножения чисел. Оно заменяется более слабым требованием альтернативности умножения, состоящим в выполнении двух тождеств:

$$(\forall\ x, y \in A)\ [(x \ast x) \ast y = x \ast (x \ast y)];\ (\forall\ x, y \in A)\ [(y \ast x) \ast x = y \ast (x \ast x)].$$

Если в определении алгебры с делением над полем P свойство ассоциативности операции $*$ в теле $< A;\ +, * >$ заменить свойством альтернативности этой операции, то мы придем к определению *альтернативной алгебры с делением над полем P.* С учетом этого определения исходные алгебры с делением называют *ассоциативными.* Ясно, что всякая ассоциативная алгебра с делением является альтернативной.

Обобщенная теорема Ф. Фробениуса дает описание всех альтернативных алгебр с делением над полем R. Их всего четыре: алгебра действительных чисел, алгебра комплексных чисел, алгебра кватернионов и алгебра октав. Алгебра октав открыта Артуром Кэли. Она содержит 8 мнимых единиц, всякий ее элемент представляется в виде их линейной комбинации с действительными коэффициентами и реализуется как вектор из R^8.

Подводя итог, можно сделать следующий вывод. Над полем R действительных чисел для алгебр с делением возможны лишь следующие случаи:

1) поле действительных чисел – это единственная алгебра ранга 1;

2) поле комплексных чисел – это единственная коммутативная и ассоциативная алгебра ранга > 1;

3) тело кватернионов – единственная ассоциативная, но не коммутативная алгебра конечного ранга;

4) алгебра октав – единственная альтернативная, но не ассоциативная и не коммутативная алгебра конечного ранга.

Добавим, что во второй половине XX в. на основе глубоких топологических соображений было доказано, что над полем R действительных чисел всякая алгебра с делением имеет ранг 1, 2, 4 или 8. Таким образом, и это направление обобщений систем чисел получило определенное завершение.

Построенные числовые системы называют *системами гиперкомплексных чисел*, или *гиперкомплексными системами*, поскольку все они представляют собой обобщения понятия комплексного числа. Магистранту полезно представить и осознать генезис этих обобщений.

Как известно, комплексные числа геометрически изображаются точками плоскости, и действия над ними соответствуют простейшим геометрическим преобразованиям плоскости – параллельному переносу, повороту, растяжению или сжатию и их комбинациям. Системы гиперкомплексных чисел (и, прежде всего, система кватернионов, открытая У.-Р. Гамильтоном) появились при попытках создать такие системы чисел, которые могли бы описывать геометрические преобразования в пространствах размерностей > 2. Оказалось, что из векторных пространств размерности $n > 2$ над полем R действительных чисел построить числовую систему с естественными свойствами операции умножения можно далеко не для всех размерностей, и даже в этих случаях приходится отказываться от ряда свойств, которыми обладает операция умножения комплексных чисел. В частности, ни одна алгебра гиперкомплексных чисел не является полем (в отличие от комплексных чисел): умножение не коммутативно. Тем не менее арифметические действия над кватернионами соответствуют простейшим геометрическим преобразованиям трех- и четырехмерных пространств, а произведение кватернионов друг на друга непосредственно связано со скалярным и векторным произведением векторов в трехмерном пространстве.

Вот какой итог сделанным обобщениям подвел академик Л. С. Понтрягин: «Таким образом, действительные и комплексные числа являются продуктом исторического развития математики. Кватернионы были построены из обобщательских соображений. Это была попытка обобщить комплексные числа, но она не дала ценных результатов, так как отсутствие коммутативности не дат возможности развить теорию кватернионных функций. По сравнению с тем значением, которое имеют действительные и комплексные числа в математике, роль кватернионов ничтожна» [18, с. 97].

Дальнейшие обобщения в теории алгебр идут по ряду направлений. Отказ от ассоциативности умножения в алгебре приводит не только к альтернативным алгебрам, о которых говорилось выше, но при рассмотрении других тождеств – и к другим алгебрам, в частности к йордановым алгебрам и алгебрам Ли, имеющим значительные приложения в геометрии, топологии, математическом анализе, физике. Наряду с алгебрами конечного ранга над полем P рассматриваются бесконечномерные алгебры, теория которых находит применение, в частности, в функциональном анализе. Еще один тип обобщений состоит в том, что алгебры рассматриваются не над полем R действительных чисел, а над полем C комплексных чисел, или над каким-либо другим полем, или даже над (коммутативными) кольцами. Именно в такой общности алгебры изучаются в трактате Н. Бурбаки.

Процедура удвоения для получения новых систем чисел. Эта процедура – еще одна идея, приводящая к получению новых числовых систем. Она основана на анализе процедуры, приведшей к расширению системы R действительных чисел до трех систем C, D_1 и D_0. Каждая из этих систем состоит из элементов вида $z = a + bi$, где $a, b \in R$, а i – некий новый объект, коммутирующий с действительными числами при умножении, т. е. $bi = ib$ для любого $b \in R$, и удовлетворяющий условию: $i^2 = -1$, или $i^2 = 1$, или $i^2 = 0$, т. е. $i^2 = \varepsilon$, где ε равно -1, или 1, или 0. Таким образом, при переходе от R к C, D_1, D_0 происходит удвоение системы R, и мы от системы ранга 1 переходим к системе ранга 2.

Если теперь эту процедуру удвоения применить к числам вида $z = a + bi$, где $a, b \in R$, то мы получим числа вида $u = z_1 + z_2 i$, где $z_1, z_2 \in C$ (или D_1, или D_0), а j – новый объект, удовлетворяющий условию: $j^2 = \delta$, где δ равно –1, или 1, или 0, и коммутирующий при умножении с действительными числами, а при умножении на символ i справа антикоммутирующий с ним ($ji = -ij$), или коммутирующий с ним ($ji = ij$), или вырожденный ($ji = 0$), т. е. $ji = \alpha ij$, где α равно –1, или 1, или 0.

Тогда, если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то $u = (a + bi) + (c + di)j = a + bi + cj + dij$. Произведение ij представляет собой новый объект, который обозначается $k = ij$. Тогда $u = a + bi + cj + dk$. Элементы i, j, k называют *мнимыми единицами*. Их попарные произведения вычисляются исходя из равенств: $i^2 = \varepsilon$, $j^2 = \delta$, $ji = \alpha ij$. При $\varepsilon = \delta = \alpha = -1$ получаем систему кватернионов. Таким образом, мы от числовой системы ранга 2 в результате описанной процедуры, называемой процедурой удвоения, переходим к системам гиперкомплексных чисел ранга 4.

Далее процедуру удвоения можно применить к системе чисел вида $u = a + bi + cj + dk$, полученной на предыдущем шаге процедуры удвоения. Получим числа вида $w = u_1 + u_2 l$, где u_1, u_2 – числа предыдущей числовой системы, а l – некий новый объект. И так далее. Таким путем получаются гиперкомплексные числовые системы ранга n, где n – степень числа 2. Среди этих систем к настоящему времени хорошо изучены так называемые числа Клиффорда, числа Грассмана, числа Паули, числа Дирака, числа Калуцы и ряд других. Для них построены теории, во многом аналогичные теории функций комплексной переменной. Благодаря этому они нашли определенное применение в ряде разделов современной математики и других наук: неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, квантовой теории поля, теории упругости и др. [16].

* * *

На уровне магистратуры все эти вопросы могут быть рассмотрены с разной степенью подробности: некоторые детально с доказательствами изложены на лекциях, другие разобраны на практических занятиях, третьим могут быть посвящены курсовые и выпускные квалификационные работы (магистерские диссертации). Последние могут и дальше развивать теорию алгебр, которая не заканчивается приведенными результатами, а только с них начинается. С содержательными подробностями данных теорий можно познакомиться в книгах И. Л. Кантора, А. С. Солодовникова, С. В. Ларина, В. И. Нечаева, Л. С. Понтрягина, С. Фефермана [13, 17–20].

Итак, теория алгебр, начавшаяся с изучения чисел и числовых систем, достигла в настоящее время высокой степени обобщенности и глубины. В этом качестве она находит применение в различных разделах математики, в других науках и в практике.

Освоение основ этой теории магистром профиля «математическое образование», несомненно, будет способствовать более осознанному пониманию им существа аксиоматического метода, строения аксиоматических теорий в математике, механизмов развития математической науки, а вместе с тем поможет сложиться целостному видению математики как единой науки. В результате образовательный уровень магистра будет выше образовательного уровня бакалавра педагогического математического образования.

Статья рекомендована к публикации
д-ром физ.-мат. наук, проф. В. Л. Гапонцевым

Список использованных источников

1. Богомолова Е. П. Формирование программы по математике в техническом университете и качество математических знаний // Образование и наука. 2016. № 1 (130). С. 34–50.

2. Игошин В. И. Подготовка будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики в условиях бакалавриата и магистратуры // Образование и наука. 2013. № 7 (106). С. 85–100.

3. Игошин В. И. Формирование логико-философской культуры будущих учителей математики в условиях магистратуры // Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии. 2012. Т. 2. С. 153–157.

4. Игошин В. И. О подготовке бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «педагогическое образование» // Известия Саратовского университетата. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 103–106.

5. Игошин В. И., Капитонова Т. А., Лебедева С. В. Содержательно-методические аспекты предметной подготовки бакалавров педагогического образования (профиль – математическое образование) // Гуманитарные науки и образование. 2012. № 1 (9). С. 14–17.

6. Игошин В. И. Дидактическое взаимодействие логики и математики // Педагогика. 2002. № 1. С. 51–55.

7. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие для студентов высших учебных заведений. Москва: Академия, 2010. 448 с.

8. Игошин В. И. Математическая логика: учебное пособие. Москва: ИНФРА-М, 2014. 399 с.

9. Игошин В. И. Математическая логика как педагогика математики. Саратов: Наука. 2009. 360 с.

10. Игошин В. И. Математическая логика в обучении математике. Логико-дидактическая подготовка учителя математики. Saarbrüken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2012. 517 с. ISBN: 978-3-659-98033-6.

11. Игошин В. И. Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании. 2010. № 8. С. 19–36.

12. Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин. 1894–1919. Москва: Наука: Физматлит, 1996. 160 с.

13. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. Москва: Наука, 1973. 144 с.

14. Колмогоров А. Н. Математика – наука и профессия. Москва: Наука, 1988.

15. Ивлев Д. Д. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. Москва: Физматлит, 1961. Вып. 6. С. 197–203.

16. Сильвестров В. В. Системы чисел // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 8. С. 121–127.

17. Ларин С. В. Числовые системы. Москва: Академия, 2001. 160 с.

18. Нечаев В. И. Числовые системы. Москва: Просвещение, 1975.

19. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. Москва: Наука, 1986. 120 с. (Библиотека «Квант». Вып. 54).

20. Феферман С. Числовые системы: пер. с англ. Москва: Наука. 1971. 440 с.

Статья поступила в редакцию 04.07.2016; принята в печать 16.11.2016.
Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Об авторе:

Игошин Владимир Иванович – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, Саратов (Россия). E-mail: igoshinvi@mail.ru

References

1. Bogomolova E. P. Program formation in mathematics at the technical university and the quality of knowledge. *Obrazovanie i nauka.* [*The Education and Science Journal*]. 2016. № 1 (130). P. 34–50. (In Russian)

2. Igoshin V. I. Bachelors and post-graduated education of mathematics and informatics teachers in discrete mathematical science. *Obrazovanie i nauka.* [*The Education and Science Journal*]. 2013. № 7 (106). P. 85–100. (In Russian)

3. Igoshin V. I. Bachelors and post-graduated education of mathematics teachers in logical and philosophical culture. *Izvestiya Samarskoi gosudarstvennoi selskochozyaistvennoi akademii.* [*Proceedings of Samara Agriculture Academy*]. 2012. V. 2. P. 153–157. (In Russian)

4. Igoshin V. I. About learning of bachelors and post-graduated students of pedagogical education (mathematical education). *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Filosofiya. Psihologiya. Pedagogika.* [*Proceedings of Saratov University. New series. Series: Philosophy. Psychology. Pedagogics*]. 2014. V. 14. V. 3. P. 103–106. (In Russian)

5. Igoshin V. I., Kapitonova T. A., Lebedeva S. V. The methodical aspects of subject training for bachelors in pedagogics (mathematical education type). *Gumanitarnie nauki i obrazovanie.* [The *Humanities and Education*]. 2012. № 1 (9). P. 14–17. (In Russian)

6. Igoshin V. I. Didactic interaction of logic and mathematics. *Pedagogika.* [*Pedagogy*]. 2002. № 1. P. 51–55. (In Russian)

7. Igoshin V. I. Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov. [Mathematical logic and theory of algorithms: Textbook for students]. Moscow: Publishing House Akademia, 2010. 448 p. (In Russian)

8. Igoshin V. I. Matematicheskaya logika. [Mathematical logic]. Moscow: Publishing House INFRA-M, 2014. 399 p. (In Russian)

9. Igoshin V. I. Matematicheskaya logika kak pedagogika matematiki. [Mathematical logic as pedagogic of mathematics]. Saratov: Publishing House Nauka, 2009. 360 p. (In Russian)

10. Igoshin V. I. Matematicheskaya logika v obuchenii matematike. Logiko-didakticheskaya podgotovka uchitelia matematiki. [Mathematical logic in teaching mathematics]. Saarbrüken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2012. 517 p. (In Russian)

11. Igoshin V. I. Subject «Number systems» for pedagogical university. *Matematika v vysshem obrazovanii.* [*Mathematics in Higher Education*]. 2010. № 8. P. 19–36. (In Russian)

12. Igoshin V. I. Mihail Yakovlevich Suslin. 1894–1919. [Mihail Yakovlevich Souslin. 1894–1919]. Moscow: Publishing House Nauka-Fizmatlit, 1996. 160 p. (In Russian)

13. Kantor I. L., Solodovnikov A. S. Giperkompleksnye chisla. [Hipercomplex numbers]. Moscow: Publishing House Nauka, 1973. 144 p. (In Russian)

14. Kolmogorov A. N. Matematika – nauka i professiya. [Mathematics – science and profession]. Moscow: Publishing House Nauka, 1988. (In Russian)

15. Ivlev D. D. About double numbers and its functions. *Matematicheskoe prosveszhenie.* [*Mathematical Education*]. 1961. V. 6. P. 197–203. (In Russian)

16. Silvestrov V. V. Systems of numbers. Sorosovskij obrazovatel'nyj zhurnal. [*Soros Education Journal*]. 1998. № 8. P. 121–127. (In Russian)

17. Larin S. V. Chislovye sistemy. [Number systems]. Moscow: Publishing House Akademia, 2001. (In Russian)

18. Nechaev V. I. Chislovye sistemy. [Number systems]. Moscow: Publishing House Prosveshhenie, 1975. (In Russian)

19. Pontriagin L. S. Obobszheniya chisel. [Generation of numbers]. Moscow: Publishing House Nauka, 1986. 120 p. (In Russian)

20 Feferman S. Chislovye sistemy. [Number systems]. Translated from English. Moscow: Publishing House Nauka, 1971. 440 p. (In Russian)

Received: 04.07.2016; accepted for printing: 16.11.2016.

The author has read and approved the final manuscript.

About the author:

Vladimir I. Igoshin – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Department of Mathematics and Mechanics, Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov (Russia). E-mail: igoshinvi@mail.ru.